

Sätze und Definitionen der Analysis I - III aus den Vorlesungen von Prof. K.T. Sturm

Christian Hammann Tim Odenthal

Sommersemester 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Zahlen	6
1.1	\mathbb{N}	6
1.1.1	Induktion	6
1.2	\mathbb{R}	6
1.2.1	Vollständigkeit	6
1.3	\mathbb{C}	6
2	Folgen und Reihen	7
2.1	Konvergenz von Folgen	7
2.1.1	Grenzwert	7
2.1.2	Konvergenzkriterium von Cauchy	7
2.1.3	Häufungswerte und der Satz von Bolzano-Weierstraß	7
2.2	Konvergenz von Reihen	7
2.2.1	Konvergenzkriterium von Leibniz	7
2.2.2	Majorantenkriterium	7
2.2.3	Quotientenkriterium	7
2.2.4	Wurzelkriterium	8
2.3	Summierbare Familien	8
2.3.1	Großer Umordnungssatz	8
2.3.2	Doppelreihensatz	8
2.3.3	Cauchy-Produkt	9
2.4	Potenzreihen	9
2.4.1	Konvergenzradius	9
2.4.2	Exponentialreihe	9
3	Funktionen	10
3.1	Stetigkeit	10
3.1.1	Zwischenwertsatz	10
3.1.2	Maximumprinzip	10
4	Metrische und Topologische Räume	10
4.1	Definitionen	10
4.2	Konvergenz in metrischen Räumen	12
4.3	Stetigkeit in metrischen Räumen	12
4.3.1	Gleichmäßige Konvergenz	13
4.4	Kompaktheit	13
4.4.1	Satz von Bolzano-Weierstraß	14
5	Differenzialrechnung	14
5.1	Differenzierbarkeit	14
5.1.1	„links- und rechtsseitige“ Ableitungen	14
5.1.2	Differenziationsregeln	15

5.1.3	Ableitung der Umkehrfunktion	15
5.2	Lokale Extrema	15
5.2.1	Monotonie	15
5.3	Satz von Rolle	15
5.3.1	Mittelwertsatz	15
5.3.2	Schrankensatz	16
5.4	Regel von de l'Hospital	16
5.5	Konvexität	16
5.5.1	Ungleichung von Jensen	16
5.5.2	Hölder- und Cauchy-Schwarz - Ungleichungen	16
6	Riemann-Integral	17
6.1	Integral einer Treppenfunktion	17
6.1.1	Definitionen	17
6.2	Integral anderer Funktionen	17
6.3	Mittelwertsatz der Integralrechnung	17
6.4	Fundamentalsatz der Differential und Integralrechnung	18
6.5	Integrationsregeln	18
6.5.1	partielle Integration	18
6.5.2	Substitution	18
6.5.3	Partialbruchzerlegung	18
6.6	Uneigentliche Integrale	18
6.7	Integralkriterium für Reihenkonvergenz	19
7	Differenzialrechnung in höheren Dimensionen	19
7.1	Richtungsableitung, Partielle Ableitung	19
7.2	Totale Differenzierbarkeit	20
7.2.1	Kettenregel	21
7.3	Taylorreihen	21
7.4	Lokale Extrema	22
7.5	Harmonische Funktionen	23
7.6	Konvexe Funktionen	23
7.7	Implizite Funktionen	23
7.8	Gleichmäßige Stetigkeit und Konvergenz	24
7.9	Umkehrsatz und Extrema unter Nebenbedingungen	24
7.10	Vertauschbarkeit	25
7.10.1	Vertauschbarkeit von Limes und Ableitung	25
7.10.2	Vertauschbarkeit von Differenziation und Integration	25
7.11	Potenzial zu Vektorfeld	25
7.12	Dirichlet-Problem für Laplace-Gleichung im Halbraum	25
7.12.1	Wärmeleitungsgleichung	26
7.13	Euler-Lagrange-Gleichungen und Hamiltonsches Prinzip	26

8	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	27
8.1	Eindeutigkeitssatz	28
8.2	Existenzsatz von Picard-Lindelöf	28
8.3	Banachscher Fixpunktsatz	28
8.4	Lösungsverfahren 1: Separation der Variablen	28
8.5	Lineare gewöhnliche Differenzialgleichungen	29
8.5.1	Lösungsverfahren 2: Variation der Konstanten	30
8.5.2	Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten	31
9	Maßtheorie und Lebesgue-Integration	32
9.1	Definitionen der Maßtheorie	32
9.1.1	σ -Algebra	32
9.1.2	Maß, Lebesguemaß	32
9.1.3	Prämaß	33
9.2	Fortsetzungen von Maßen	33
9.2.1	Eindeutigkeit der Maßfortsetzung	33
9.2.2	Fortsetzungssatz von Carathéodory	33
9.3	Messbare Funktionen	34
9.4	Definition des Integrals	34
9.4.1	Integral einer Indikatorfunktion	34
9.4.2	Integral einer Elementarfunktion	34
9.4.3	Integral einer nicht-negativen Funktion	35
9.4.4	Integral einer messbaren Funktion	35
9.5	Bezeichnung zur Integration	35
9.6	Die Konvergenzsätze	35
9.6.1	Satz von der monotonen Konvergenz (Satz von Beppo Levi)	35
9.6.2	Lemma von Fatou	36
9.6.3	Satz von der majorisierten Konvergenz (Satz von Lebesgue)	36
9.7	Fundamentalsatz der Differenzial- und Integralrechnung	36
9.8	Bildmaße	36
9.9	Mehrdimensionale Integration	36
9.9.1	Produktmaß	36
9.9.2	Satz von Fubini	37
9.9.3	Cavalierisches Prinzip	37
9.9.4	Transformationsformel	37
9.9.5	Transformationssatz	37
9.9.6	Integration rotations-symmetrischer Funktionen	38
9.9.7	Vergleich zum Riemann-Integral	38
9.10	Lebesgue-Räume	38
9.10.1	Young-, Hölder-, Minkowski- und Jensen - Ungleichungen	39
9.11	Faltung auf dem \mathbb{R}^n	39
9.12	Dirac-Folgen	40
9.12.1	Approximationssatz von Weierstraß	40
9.12.2	parameterabhängige Lebesgue-Integrale	40

9.12.3 Differenzierbarkeit unter dem Integral	40
10 Fourierintegrale	41
10.1 Periodische Funktionen	41
10.2 Fourierreihen	41
10.3 Besselsche Ungleichung und Parsevalsche Gleichung	41
10.3.1 Besselsche Ungleichung	41
10.3.2 Parsevalsche Gleichung	41
10.4 Fouriertransformation	42
10.4.1 Rechenregeln	42
10.4.2 Umkehrrsatz	42
10.4.3 Satz von Plancherel	42
11 Integration auf Untermannigfaltigkeiten	43
11.1 Integrale auf Untermannigfaltigkeiten	44
11.2 Tangentialraum	45
11.3 Satz von Gauß	45
11.4 Greensche Formel	45
11.5 Satz von Stokes	46
Index	47

1 Zahlen

1.1 \mathbb{N}

Die Natürlichen Zahlen

1.1.1 Induktion

Man durchläuft alle Natürlichen Zahlen, wenn man bei 1 anfangend jeweils 1 hinzu addiert. Darauf aufbauend erhält man das Beweisverfahren der vollständigen Induktion:

1. Induktionsanfang: Die Behauptung wird für $n = 1$ gezeigt
2. Induktionsschritt: Es wird die Behauptung für $n + 1$ gezeigt, unter der Annahme sie ist für n richtig

Damit ist die Behauptung für alle Natürlichen Zahlen gezeigt.

1.2 \mathbb{R}

Der Körper der Reellen Zahlen \mathbb{R} ist vollständig und bezüglich Addition und Multiplikation abgeschlossen.

1.2.1 Vollständigkeit

Vollständigkeit bedeutet, dass jede Intervallschachtelung genau ein Element enthält. Eine Intervallschachtelung ist Schnittmenge aller Elemente einer Folge von Intervallen I_n für die gilt:

1. $I_{n+1} \subset I_n$
2. $|I_n| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$

Äquivalent zu dieser ist die Definition:

jede Cauchyfolge (siehe Kapitel 2.1.2) konvergiert gegen einen Grenzwert aus \mathbb{R} .

1.3 \mathbb{C}

Der Körper der Komplexen Zahlen \mathbb{C} ist die Erweiterung von \mathbb{R} um die Zahl i . Damit ist \mathbb{C} algebraisch abgeschlossen. Es gilt:

$$i^2 = -1$$

\mathbb{C} ist allerdings nicht mehr angeordnet so wie \mathbb{R} . Jede komplexe Zahl z lässt sich in folgenden Formen eindeutig schreiben:

$$\begin{aligned} z &= x + iy & x, y &\in \mathbb{R} \\ z &= r \cdot e^{i\varphi} & r &\in [0, \infty[\quad \varphi \in [0, 2\pi[\end{aligned}$$

2 Folgen und Reihen

2.1 Konvergenz von Folgen

2.1.1 Grenzwert

Eine Folge $(a_n)_n$ konvergiert gegen den Grenzwert a falls:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N : |a_n - a| < \epsilon$$

Eine Folge die nicht konvergiert, heißt divergent.

2.1.2 Konvergenzkriterium von Cauchy

Eine Folge $(a_n)_n$ für die gilt:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m > N : |a_n - a_m| < \epsilon$$

heißt *Cauchyfolge*. Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge. In einer vollständigen Menge (z.B. \mathbb{R}) konvergiert jede Cauchyfolge.

2.1.3 Häufungswerte und der Satz von Bolzano-Weierstraß

Ein *Häufungswert* h einer Folge $(a_n)_n$ ist ein Punkt mit

$$|a_n - h| < \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0, \text{ unendlich viele } n \in \mathbb{N}$$

Der Satz von Bolzano-Weierstraß besagt nun, dass jede beschränkte Folge $(a_n)_n$ einen Häufungswert hat.

2.2 Konvergenz von Reihen

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert wenn die Folge ihrer Partialsummen $\sum_{n=1}^k a_n$ konvergiert. Dazu muss die Folge a_n eine Nullfolge sein.

2.2.1 Konvergenzkriterium von Leibniz

Die Reihe einer alternierenden Folge a_n konvergiert genau dann, wenn $a_n \rightarrow 0$.

2.2.2 Majorantenkriterium

Existiert zu einer Reihe $\sum a_n$ eine konvergente Reihe $\sum b_n$ mit $|a_n| < b_n$ so konvergiert auch $\sum a_n$. Existiert zu einer Reihe $\sum a_n$ eine divergente Reihe $\sum b_n$ mit $|b_n| < a_n$ so divergiert auch $\sum a_n$.

2.2.3 Quotientenkriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, wenn a_n eine reelle Zahlenfolge mit $\exists N : \exists q \in]0; 1[: \forall n \geq N : a_n \neq 0$ ist, für die $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$ gilt. Zusätzlich kann man mit diesem Kriterium auch zeigen, dass eine Reihe divergiert: $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \sum a_n$ divergiert.

2.2.4 Wurzelkriterium

Sei $r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

1. Ist $r < 1$, so konvergiert $\sum a_n$.
2. Ist $r > 1$, so divergiert $\sum a_n$.

2.3 Summierbare Familien

Vorsicht beim Umordnen (unendlicher!) Reihen, denn es gilt:

Sei $\sum a_n$ konvergent, aber $\sum |a_n|$ divergent und $S \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben. Dann ex. eine Umordnung $\sum b_n = \sum a_{f(n)}$, die gegen S konvergiert. (Man nehme ($S > 0$) solange pos. Summanden, bis S überschritten ist, dann solange negative, bis S unterschritten ist, dann wieder positive: ad inf.)

Daher definiert man: Eine Reihe heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe der Beträge konvergiert: $\sum |a_n|$.

Eine solche Reihe ist invariant unter Umordnung.

Etwas allgemeiner definiert man: Eine Familie $(a_i)_{i \in I}$ heißt *summierbar* wenn gilt:

$$\exists S, \forall \epsilon > 0, \exists J_\epsilon \subset I \text{ endlich, } |S - a_J| < \epsilon, \forall J_\epsilon \subset J \subset I, J \text{ endlich}$$

Dabei ist $a_J = \sum_{i \in J} a_i$.

Äquivalent dazu definiert man:

Die Familie $(a_i)_{i \in I}$ heißt *summierbar*, falls eine Abzählung $f : \mathbb{N} \rightarrow I$ existiert mit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Dann gilt: $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$

Ist $I = \mathbb{N}$ so ist summierbar und absolut konvergent äquivalent.

2.3.1 Großer Umordnungssatz

Seien I, K abzählbare Mengen, und für alle l, k seien I_k, I_l disjunkte Teilmengen von I mit $\bigcup_{k \in K} I_k = I$. Ferner sei $(a_i)_{i \in I}$ eine summierbare Familie reeller Zahlen. Dann ist sowohl jede Teilfamilie $(a_i)_{i \in K}$ summierbar, als auch die Familie $(s_k)_{k \in K}$ mit $(s_k) = \sum_{i \in I_k} a_i$, und es gilt:

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I_k} a_i \right)$$

Hieraus folgt sofort der

2.3.2 Doppelreihensatz

Sei $(a_{jk})_{(j,k) \in J \times K}$ summierbar (=absolut konv.). Dann ist

$$\sum_{(j,k) \in J \times K} a_{j,k} = \sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in K} a_{j,k} \right) = \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in J} a_{j,k} \right)$$

2.3.3 Cauchy-Produkt

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Folgen reeller Zahlen, so gelte $c_n = (a \star b)_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Dies nennt man *Faltung* von Folgen. (Falls $n \in \mathbb{N}$, setze $a_0 = b_0 = 0$).

Sind $\sum a_n$, $\sum b_n$ absolut konvergente Folgen, so def. die Faltung der Folgen eine absolut konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (a \star b)_n$, die man *Cauchy-Produkt der Reihen* $\sum a_n$, $\sum b_n$ nennt, und es gilt:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_j b_k = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a \star b)_n$$

2.4 Potenzreihen

Potenzreihen sind Reihen der Form: $\sum_{i=0}^{\infty} a_n x^n$

2.4.1 Konvergenzradius

Jede Potenzreihe hat einen *Konvergenzradius* $R = \sup \{ |x|, \sum a_n x^n \text{ konvergiert} \}$, für den gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \forall x, |x| < R \\ \text{divergent} & \forall x, |x| > R \end{cases}$$

Der Konvergenzradius lässt sich wie folgt berechnen:

$$R = \frac{1}{L} \quad \text{mit } L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\} \quad \text{Formel von Hadamard}$$

$$R = \frac{1}{q} \quad \text{mit } q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \text{ falls existent}$$

Die Formel von Hadamard gilt auch für komplexwertige Potenzreihen. Nachdem man alle schönen :-) Sätze über Differenzierbarkeit hat, weiss man außerdem noch über Potenzreihen:

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$, der Konvergenzradius $R > 0$.

1. Die Funktion f ist auf $]a - R, a + R[$ unendlich oft stetig differenzierbar mit

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-n+1) \cdot (x-a)^{n-k}$$

2. Die *Taylorreihe* im Entwicklungspunkt a stimmt mit f überein.

3. *Abelscher Grenzwertsatz*: Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (mit $c_n \in \mathbb{R}$), so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ in $] -1, 1[$ und definiert dort eine stetige Funktion.

2.4.2 Exponentialreihe

Die Exponentialreihe ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \exp(x) = e^x$. Ihr Konvergenzradius ist ∞ .

3 Funktionen

Eine *Funktion* ist eine eindeutige Abbildung (bei Sturm: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$).

3.1 Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig* im Punkt x_0 wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ so dass für } |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| \leq \epsilon$$

Äquivalent hierzu ist eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann *stetig* im Punkt x_0 , wenn (*Folgenkriterium*):

$$\text{für jede Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } x_n \in D \text{ und } x_n \rightarrow x_0 \text{ gilt: } f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

Eine Funktion heißt *stetig* auf einer Menge D , falls sie für alle $x \in D$ stetig ist. Eine Funktion heißt *gleichmäßig stetig* auf D falls:

$$\epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ so dass } \forall x, x_0 \in D : |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| \leq \epsilon$$

Eine Funktion heißt *Lipschitz-stetig* auf D falls:

$$\forall x, y \in D, |f(y) - f(x)| \leq L |y - x|$$

L heißt Lipschitz-Konstante.

3.1.1 Zwischenwertsatz

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert γ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an mindestens einer Stelle $c \in [a, b]$ an.

3.1.2 Maximumprinzip

Jede auf einer kompakten Menge K (siehe Kapitel 4.4) stetige Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt ihr Maximum (Minimum) an, d.h.:

$$\exists \xi_1, \xi_2 : \forall x \in K : f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2)$$

4 Metrische und Topologische Räume

4.1 Definitionen

1. Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) bestehend aus einer beliebigen Menge X und einer Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- a) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- b) $d(x, y) = d(y, x)$ 'Symmetrie'

c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ 'Dreiecksungleichung'

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum

a) Für $x \in X$, $r > 0$ heißt $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ (*offene*) Kugel um x mit dem Radius r . (B wegen engl. 'ball'.)

b) Eine Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung* eines Punktes $x \in X$, falls $\exists r > 0 : B_r(x) \subset U$

c) Eine Menge $U \subset X$ heißt *offen*, falls U Umgebung jedes ihrer Punkte ist, d.h. falls $\forall x \in U : \exists r > 0 : B_r(x) \subset U$

d) Eine Menge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls die Menge $X \setminus A$ offen ist.

e) Es gilt:

i. \emptyset und X sind offen.

ii. \emptyset und X sind abgeschlossen.

iii. Sind U und V offen, so auch $U \cap V$. (Gilt auch für Durchschnitte endl. vieler offener Mengen, Schnitte unendlicher Mengen können auch nicht-offen sein...)

iv. Sind U und V abgeschlossen, so auch $U \cup V$.

v. Ist $U_i, i \in I$, eine Familie offener Mengen, so ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ wieder offen.

vi. Ist $U_i, i \in I$, eine Familie abgeschlossener Mengen, so ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ wieder abgeschlossen.

3. Ein Paar (X, \mathcal{U}) heißt *topologischer Raum*, falls X eine beliebige Menge und \mathcal{U} eine Teilmenge der Potenzmenge von X ist, deren Elemente als offene Mengen bezeichnet werden und die folgenden, oben bereits genannten Eigenschaften erfüllen:

a) \emptyset und X sind offen.

b) Sind U und V offen, so auch $U \cap V$.

c) Ist $U_i, i \in I$, eine Familie offener Mengen, so ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ wieder offen.

\mathcal{U} heißt dann *Topologie* auf X .

4. $\overset{\circ}{A}$ heißt *Inneres* von A , falls $\overset{\circ}{A} :=$ Vereinigung aller offenen Mengen $U \subset A$, wobei $A \subset X$ mit (X, d) metrischer Raum.

5. \bar{A} heißt *Abschluss* von A , falls $\bar{A} :=$ Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen $F \supset A$. Hierbei ist \bar{A} abgeschlossen, $\bar{A} \supset A$.

6. ∂A heißt *Rand* von A mit $\partial A := \bar{A} - \overset{\circ}{A}$.

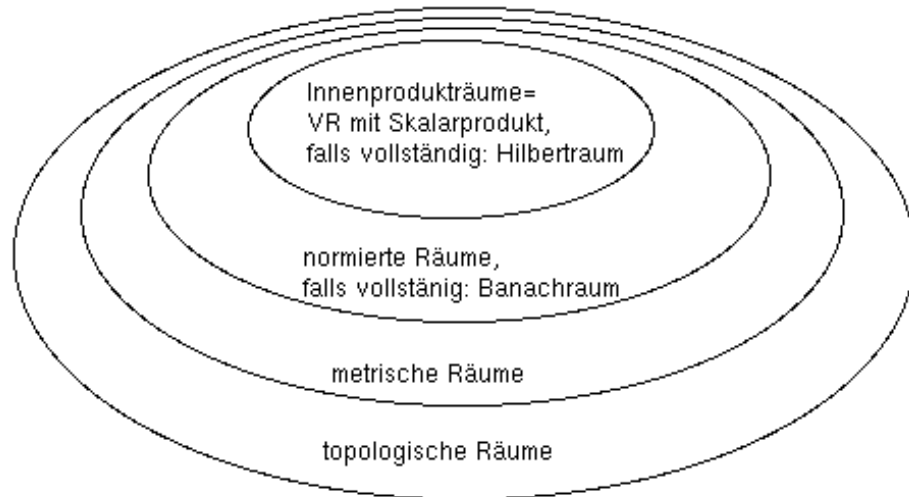


Abbildung 1: Topologische Räume

4.2 Konvergenz in metrischen Räumen

Zu *konvergenten Folgen* (vgl. 2.1.2):

1. Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in X (metrischer Raum) und $x \in X$.
 $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x
 $\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$
 $\Leftrightarrow \forall$ Umgebung U von $x : \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 : x_k \in U$
 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 : x_k \in B_\epsilon(x)$
 $\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x) = 0$
2. $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine *Cauchyfolge* $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k, n \geq k_0 : d(x_k, x_n) \leq \epsilon$
3. (X, d) heißt *vollständig* \Leftrightarrow jede Cauchyfolge in X konvergiert in X . (z.B. ist der \mathbb{R}^n mit $d =$ Euklid. vollständig.)
4. Für $M \subset X$ (X metr. Raum) gilt: M ist abgeschlossen \Leftrightarrow für jede Folge in M , die gegen ein $x \in X$ konvergiert, gilt: $x \in M$.
5. Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum, $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots$ Folge nichtleerer, abgeschlossener Mengen mit $\text{diam}(M_k) := \sup \{d(x, y) : x, y \in M_k\} \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Dann

$$\exists! x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k$$

4.3 Stetigkeit in metrischen Räumen

Zur *Stetigkeit* von Abbildungen zwischen metrischen Räumen (vgl. 3.1). Seien X, Y metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$

Dann heißt f *stetig* im Punkt $\xi \in X$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$$

$$\Leftrightarrow \forall \text{ Folgen } (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi \text{ gilt } \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(\xi)$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \underbrace{\forall x \in B_\delta(\xi) : f(x) \in B_\epsilon(f(\xi))}_{f(B_\delta(\xi)) \subset B_\epsilon(f(\xi))}$$

$$\Leftrightarrow \forall \text{ Umgebungen } V \text{ von } f(\xi) : \exists \text{ Umgebung } U \text{ von } \xi : f(U) \subset V$$

$$\Leftrightarrow \forall \text{ Umgebungen } V \text{ von } f(\xi) : f^{-1}(V) \text{ ist Umgebung von } \xi$$

Des Weiteren heißt f stetig auf $X \Leftrightarrow f$ ist stetig in jedem $\xi \in X$. Hieraus ergeben sich folgende wichtige Korollare:

1. f stetig auf $X \Leftrightarrow$ das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen Menge $V \subset Y$ ist offen in X .
2. f stetig auf $X \Leftrightarrow$ das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder abgeschlossenen Menge $V \subset Y$ ist abgeschlossen in X .
3. Für stetiges $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ und für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
 - a) $\{f < \lambda\} := \{x \in X : f(x) < \lambda\}$ ist offen,
 - b) $\{f < \lambda\}$ ist offen,
 - c) $\{f \leq \lambda\}$, $\{f \geq \lambda\}$, $\{f = \lambda\}$ sind abgeschlossen.

Wie schon bei der 'einfachen' Stetigkeit von Funktionen festgestellt, sind Summe, Produkt, Quotient (unter der normalen Voraussetzung, dass der Nenner $\neq 0$) und Verkettung stetiger Abbildungen wieder stetig. Außerdem ist eine solche Abbildung genau dann stetig, wenn ihre Komponentenfunktionen stetig sind.

4.3.1 Gleichmäßige Konvergenz

Betrachte X, Y metrische Räume, $f, f_k : X \rightarrow Y$.

Dann konvergiert f_k gleichmäßig gegen f auf X

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists k \geq k_0 : \forall x \in X : d(f_k(x), f(x)) \leq \epsilon$$

Wenn nun $f_k : X \rightarrow Y$ stetig ($\forall k$), $f_k \rightarrow f$ gleichmäßig auf $X \Rightarrow f$ stetig.

Der Raum $\mathcal{C}_b(X)$ der beschränkten, stetigen Funktionen auf X (mit der Supremumsnorm) ist vollständig.

4.4 Kompaktheit

Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes (X, d) heißt *kompakt*, falls für jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von M gilt: \exists eine endliche Menge $J \subset I$ mit $\bigcup_{i \in J} U_i \supset M$.

Dabei heißt $(U_i)_{i \in I}$ *offene Überdeckung* von M , falls:

1. $\forall i \in I : U_i$ offen $\subset X$
2. $\bigcup_{i \in I} U_i \supset M$

Dabei ist I beliebig. Sei $M \subset X$, X metrischer Raum, dann gilt:

1. M ist kompakt $\Rightarrow M$ ist abgeschlossen und beschränkt.
2. Für $M \subset \mathbb{R}^n$ gilt nach dem *Satz von Heine-Borel*: M ist kompakt $\Leftrightarrow M$ ist abgeschlossen und beschränkt.
3. Falls X kompakt, ist M kompakt $\Leftrightarrow M$ abgeschlossen.

4.4.1 Satz von Bolzano-Weierstraß

Sei X ein metrischer Raum, $M \subset X$. Dann ist M kompakt \Leftrightarrow jede Folge in M besitzt eine in M konvergente Teilfolge.

Außerdem folgt aus der Kompaktheit des Ausgangsraumes:

1. Jede stetige Funktion nimmt sup und inf an.
2. Jede stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

5 Differenzialrechnung

5.1 Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in x_0 *differenzierbar* falls:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. f' heißt Ableitung von f .

Äquivalent zu dieser aus der Schule bekannten Definition verwendet man:

1. Für differenzierbare Funktionen gilt:

$$\forall x \in D : \exists \phi : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig in } x_0, \text{ mit } f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \phi(x)$$

2. Es existiert eine affin lineare Abbildung $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} [f(x) - L(x)] = 0, \text{ wobei } x \in D \setminus \{x_0\},$$

dabei $L(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0)$.

5.1.1 „links- und rechtsseitige“ Ableitungen

Man definiert ebenfalls die links- bzw rechtsseitige Ableitung als $\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ bzw.

$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Sind links- und rechtsseitige Ableitung gleich, so ist die Funktion an dieser Stelle differenzierbar, die links- und rechtsseitige Ableitung ist gleich der „normalen“ Ableitung.

5.1.2 Differenzierungsregeln

Seien f und g differenzierbar. Dann sind auch differenzierbar:

$$\begin{aligned}(f + g)' &= f' + g' \\ (f \cdot g)' &= f' \cdot g + g' \cdot f \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{für } g \neq 0 \\ (f \circ g)' &= g' \cdot (f' \circ g)\end{aligned}$$

5.1.3 Ableitung der Umkehrfunktion

Sei f eine Funktion und $g := f^{-1}$ die Umkehrfunktion von f . Dann gilt mit $y = f(x)$:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

5.2 Lokale Extrema

Gilt für eine Funktion $f(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Punkt $x_0 \in D$ $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in B_\epsilon(x_0)$, so heißt x_0 Extremum bzw. ^{Maximum}.

Eine notwendige Bedingung für ein Extremum an der Stelle x_0 ist $f'(x_0) = 0$. Ist zusätzlich $f''(x_0) \leq 0$ so handelt es sich um ein ^{Maximum}/_{Minimum}.

5.2.1 Monotonie

Mit Hilfe der Ableitung kann man auch eine Aussage über die Monotonie einer Funktion erhalten. Es gilt:

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & f \text{ streng monoton wachsend} \\ \geq 0 & f \text{ monoton wachsend} \\ = 0 & f \text{ konstant} \\ \leq 0 & f \text{ monoton fallend} \\ < 0 & f \text{ streng monoton fallend} \end{cases}$$

5.3 Satz von Rolle

Gilt für eine auf $[a, b]$ stetige und auf (a, b) differenzierbare Funktion $f(a) = f(b)$, so existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

5.3.1 Mittelwertsatz

Aus dem Satz von Rolle folgt sofort durch Subtraktion einer linearen Funktion der *Mittelwertsatz*: Für eine auf $[a, b]$ stetige und auf (a, b) differenzierbare Funktion f gilt

$$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

5.3.2 Schrankensatz

Ist $f : (a, b) \mapsto \mathbb{C}$ differenzierbar und die Ableitung beschränkt, so ist f Lipschitz-stetig. Es gilt:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$$

5.4 Regel von de l'Hospital

Seien $f, g : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. In jeder der beiden Situationen:

1. $f(x) \rightarrow 0$ und $g(x) \rightarrow 0$ für $x \searrow a$
2. $f(x) \rightarrow \infty$ und $g(x) \rightarrow \infty$ für $x \searrow a$

gilt:

$$\text{Existiert } \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ so auch } \lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ mit } \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

5.5 Konvexität

Eine Funktion f heißt *konvex* auf dem Intervall I , falls für alle Zahlentripel $x_1, x, x_2 \in I$ mit $x_1 < x < x_2$ gilt:

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} f(x_2)$$

Dies ist äquivalent zu:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2), \quad \forall \lambda \in (0, 1)$$

Falls die Funktion f auf dem Intervall I differenzierbar ist, so ist sie genau dann konvex, wenn die Ableitung f' monoton wächst. Ist f zweimal differenzierbar, ist f genau dann konvex wenn $f'' \geq 0$. Gilt sogar $f'' > 0$, so ist f streng konvex.

5.5.1 Ungleichung von Jensen

Sei $f : I \mapsto \mathbb{R}$ konvex, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, dann gilt für alle $x_1, \dots, x_n \in I$:

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

5.5.2 Hölder- und Cauchy-Schwarz - Ungleichungen

Sei $\|z\|_p = (\sum_{i=1}^n |z_i|^p)^{1/p}$; $p > 1$ die p-Norm eines Vektors $z \in \mathbb{C}^n$. Damit gilt für $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und 2 beliebige Vektoren $z, w \in \mathbb{C}^n$ die Höldersche Ungleichung:

$$\sum_{k=1}^n |z_k w_k| \leq \|z\|_p \|w\|_q$$

Für $2 = q = p$ ist dies die Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$|\langle z, w \rangle| \leq \|z\| \cdot \|w\|$$

6 Riemann-Integral

6.1 Integral einer Treppenfunktion

6.1.1 Definitionen

1. Eine *Zerlegung* Z eines Intervalls $[a, b]$ ist eine Menge von Punkten $\{x_0 < \dots < x_n\} \subset I$, so dass $I = \bigcup_{k=0}^{n-1} [x_k, x_{k+1}]$.
2. Die *Feinheit* δ einer Zerlegung Z ist $\delta = \max x_k - x_{k-1}$
3. Eine Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung Z von I mit den Teilungspunkten x_0, \dots, x_n gibt, so dass f auf den Intervallen (x_k, x_{k+1}) konstant ist.

Sei f eine Treppenfunktion und Z eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, so dass f auf (x_k, x_{k+1}) konstant ist. Ferner seien $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ und $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Damit ist

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

das *Integral* von f über $[a, b]$.

6.2 Integral anderer Funktionen

Eine Funktion $f : [a, b]$ heißt *Regelfunktion*, wenn sie in jedem Punkt $x \in [a, b]$ sowohl einen linksseitigen als auch einen rechtsseitigen Grenzwert hat.

Eine Funktion $f : [a, b]$ ist genau dann Regelfunktion, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen φ_n gibt mit $\|f - \varphi_n\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, das heißt sie ist durch eine Treppenfunktion approximierbar.

Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Sei Z eine Zerlegung von $[a, b]$ mit den Teilungspunkten x_0, \dots, x_n und der Feinheit δ , sowie $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$. Dann ist

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) \, dx$$

Das Integral von f über $[a, b]$.

6.3 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei f eine stetige Funktion und p eine Regelfunktion mit $p \geq 0$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)p(x) \, dx = f(\xi) \int_a^b p(x) \, dx$$

6.4 Fundamentalsatz der Differential und Integralrechnung

Jede Regelfunktion f besitzt eine Stammfunktion F , das heißt F' stimmt fast überall mit f überein. $F(x) = \int_a^x f(y) dy$ ist eine Stammfunktion zu $f(x)$. Für jede Stammfunktion F zu f gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Mit dieser Eigenschaft lassen sich Differenzierungsregeln auf die Integration übertragen.

6.5 Integrationsregeln

6.5.1 partielle Integration

Die partielle Integration ist die Kettenregel der Differentialrechnung auf die Integralrechnung übertragen. Sind f und g differenzierbare Funktionen so gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

6.5.2 Substitution

Überträgt man die Kettenregel der Differentialrechnung so erhält man die Substitutionsregel der Integration:

$$\int_a^b f(t(x))t'(x) dx = \int_{t(a)}^{t(b)} f(t) dt$$

6.5.3 Partialbruchzerlegung

Das Integral einer rationalen Funktion $R = \frac{f}{g}$, f, g Polynome, lässt sich mit Hilfe der Partialbruchzerlegung berechnen: Es existiert eine Darstellung von R in der Folgenden Art:

$$R = p + \frac{a_{1k_1}}{(n_1 - x)^{k_1}} + \frac{a_{1k_1-1}}{(n_1 - x)^{k_1-1}} + \dots + \frac{a_{11}}{n_1 - x} + \frac{a_{2k_2}}{(n_2 - x)^{k_2}} + \dots$$

Wobei p ein Polynom ist. Hat man die Koeffizienten a_{ij} bestimmt, so läßt sich das Integral jedes einzelnen Summanden und damit auch der Gesamten Funktion R leicht berechnen.

6.6 Uneigentliche Integrale

Für die Berechnung von Integralen offener Intervalle setzt man für $f : [a, b) \mapsto \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \nearrow b} \int_a^\beta f(x) dx$$

Ebenso werden die Integrale über $(a, b]$ und (a, b) definiert.

6.7 Integralkriterium für Reihenkonvergenz

Sei f eine monoton fallende Funktion mit $f \geq 0$. Dann konvergiert die Reihe

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x) \, dx$$

und es gilt:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq f(1)$$

Hieraus folgt: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert genau dann wenn das Integral $\int_1^{\infty} f(x) \, dx$ konvergiert.

7 Differenzialrechnung in höheren Dimensionen

Hier gilt, wenn nichts anderes definiert wird:

$U \subset \mathbb{R}^n$, offen $\neq \emptyset$; $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$

7.1 Richtungsableitung, Partielle Ableitung

Definitionen:

1. f heißt im Punkt $x \in U$ *partiell differenzierbar in der i -ten Koordinatenrichtung*, falls f_i an der Stelle $x_i \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist.
2. f heißt *partiell differenzierbar in U* , falls f partiell differenzierbar in jedem Punkt $x \in U$ und in jeder Richtung $i \in \{1, \dots, n\}$.
3. f heißt *stetig partiell differenzierbar*, falls f partiell differenzierbar und die partiellen Ableitungen $D_1 f, \dots, D_n f$ stetig in U sind; kurz: $f \in C^1(U) = C^1(U, \mathbb{R})$
4. Die Richtungsableitung von f an der Stelle x in Richtung a , ($a \in \mathbb{R}^n, \|a\| = 1$) wird, falls sie existiert, wie folgt definiert:

$$D_a f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(x + ta) - f(x)]$$

Es gilt für $f \in C^1(U)$, $\forall x, \forall a$: $D_a f(x)$ existiert und

$$D_a f(x) = \langle \text{grad} f(x), a \rangle = \nabla f(x) \cdot a = \sum_{i=1}^n D_i f(x) a_i \text{ für } a = (a_1, \dots, a_n)$$

5. f heißt *k -mal (stetig) partiell differenzierbar*, falls f $(k-1)$ -mal (stetig) partiell differenzierbar und falls alle partiellen Ableitungen der Ordnung $(k-1)$: $D_{i_{k-1}} \dots D_{i_2} D_{i_1} f$ ($\forall i_1, \dots, i_k; k \in \{1, \dots, n\}$) (stetig) partiell differenzierbar sind.

6. Der *Satz von Schwarz*: Ist eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, dann gilt:

$$\forall x \in U, i, j \in \{1, \dots, n\} : D_i D_j f(x) = D_j D_i f(x)$$

Differenzialoperatoren in kartesischen Koordinaten:

$f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	$f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
$\nabla f(x) = \text{grad} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\nabla \times f(x) = \text{rot} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial y} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x} \end{pmatrix}$
$\Delta f(x) = \nabla \cdot (\nabla f(x)) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$	$\nabla \cdot f(x) = \text{div} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \right)$

7.2 Totale Differenzierbarkeit

$U \subset \mathbb{R}^n, f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt (total) differenzierbar im Punkt $x \in U$ (vgl. 2), falls \exists lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, so dass in einer Umgebung von x gilt:

$$f(x+h) = f(x) + L \cdot h + R(h)$$

wobei für das Restglied R gilt: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0$ kurz: $R(h) = o(\|h\|)$

Aus der totalen Differenzierbarkeit folgt:

- f ist stetig in x .
- Alle Koordinatenabbildungen $f_i, (i = 1, \dots, m)$ sind partiell differenzierbar in x in jeder Koordinatenrichtung $e_j, (j = 1, \dots, n)$.
- $L = \text{Jacobi-Matrix } Df(x) = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(x) \\ \vdots \\ \text{grad } f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & \cdots & D_n f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m & \cdots & D_n f_m \end{pmatrix}$ von f im Punkt x , d.h. $L_{ij} = D_j f_i(x)$; falls $m = 1 : L = \text{grad } f(x)$.
- In x existieren Richtungsableitungen in jeder Richtung a , wobei $D_a f = L \cdot a$

Man bezeichnet die Abbildung $df : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ als *Differenzial* von f , gelegentlich auch $f'(x)$.

Für Standardbasen kann man $df(x)$ mit der Jacobi-Matrix $Df(x)$ identifizieren.

stetig (partiell) differenzierbar
 \Downarrow
 Es gilt: (total) differenzierbar
 \Downarrow
 partiell differenzierbar

7.2.1 Kettenregel

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $F : U \rightarrow V$, $G : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $h = g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Falls f in $x \in U$ differenzierbar ist, und g in $y = f(x) \in V$, so ist auch h in x differenzierbar und für das Differenzial gilt: $dh(x) = dg(x) \circ df(x)$, kurz: $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

In den Standardbasen gilt also für die Matrizen:

$$Dh(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x), \text{ d.h. } D_j h_i(x) = \sum_{l=1}^m D_l g_i(f(x)) \cdot D_j f_l(x)$$

7.3 Taylorreihen

- zunächst für $n = m = 1$: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \in C^{k+1}(I, \mathbb{R})$; $x, x + \xi \in I$.
Dann gilt:

- Die Taylorsche Formel:

$$f(x + \xi) = f(x) + f'(x) \cdot \xi + f''(x) \cdot \frac{\xi^2}{2} + \dots + f^{(k)}(x) \cdot \frac{\xi^k}{k!} + R_{k+1}(\xi)$$

$$\text{mit } R_{k+1}(\xi) = \int_0^\xi f^{(k+1)}(x+t) \cdot \frac{(\xi-t)^k}{k!} dt$$

- Lagrange-Form des Restgliedes:

$$\exists \lambda \in [0, 1] : R_{k+1}(\xi) = f^{(k+1)}(x + \lambda\xi) \cdot \frac{\xi^{k+1}}{(k+1)!}$$

Wir behaupten nicht, dass $R_k(\xi) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Falls jedoch für $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ die *Taylor-Reihe*

$$T_f(x + \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x) \cdot \frac{\xi^n}{n!}$$

konvergiert, und $R_k(\xi) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$, dann gilt:

$$T_f(x + \xi) = f(x + \xi)$$

- Mehrdimensionale Taylorformel*, hierzu benötigt man folgende Definitionen:

- Für n -Tupel natürlicher Zahlen $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \text{ sowie}$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$$

- Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

- c) Für $x, \xi \in \mathbb{R}^n$: $[[x, \xi]] = \{x + t\xi : t \in [0, 1]\}$ ist dies die Strecke zwischen x und $x + \xi$.

Damit schreibt sich dann die Taylorformel für $f \in C^{k+1}(U, \mathbb{R})$, $[[x, \xi]] \subset U$ so:

$$\exists \lambda \in [0, 1] : F(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha f(x) \cdot \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} + \sum_{|\alpha|=k+1} D^\alpha f(x + \lambda\xi) \cdot \frac{\xi^\alpha}{\alpha!}$$

Aus der mehrdimensionalen Taylor-Formel ergeben sich mehrere (wichtige???) Folgerungen (es gelten die gleichen Voraussetzungen für $\forall x, f, k$ wie im Satz):

1. $\forall f, \forall x, \forall k, (\forall \xi$ in Umgebung von 0) : $\exists!$ Polynom P_k vom Grad $\leq k$ mit:

$$f(x + \xi) = P_k(\xi) + o(\|\xi\|^k)$$

2. $k = 0$: $P_0(\xi) = \text{const.} = f(x)$
 3. $k = 1$: $P_1(\xi) = f(x) + \sum_{i=1}^n D_i f(x) \xi_i = f(x) + \langle \nabla f(x), \xi \rangle$
 4. $k = 2$: $\forall f \in C^2(U, \mathbb{R}), \forall x \in U, \forall \xi$ in Umgebung von 0: Sei nun
 a) $c = f(x)$,
 b) $b = \nabla f(x)$ 'Gradient von f in x ',
 c) A : die symmetrische und reelle *Hesse-Matrix* von $f(x)$, $A := (D_i D_j)_{i,j=1,\dots,n}$

Dann gilt:

$$f(x + \xi) = c + \langle b, \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi, A \cdot \xi \rangle + o(\|\xi\|^2)$$

7.4 Lokale Extrema

Definitionen: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen $\neq \emptyset$, $x_0 \in U$

- f hat *lokales Minimum* in $x_0 \Leftrightarrow \exists$ Umgebung V von x_0 : $\forall x \in V : f(x) \geq f(x_0)$
- f hat *isoliertes (oder striktes) Minimum* in $x_0 \Leftrightarrow \exists$ Umgebung V von x_0 : $\forall x \in V : f(x) > f(x_0)$
- analog für Maxima.
- Für $f \in C^1(U, \mathbb{R})$: x_0 ist kritischer Punkt von $f \Leftrightarrow \nabla f(x_0) = 0$

Hat nun $f \in C^1$ ein lok. Extremum in x_0 , so ist x_0 ein kritischer Punkt.

Satz über Extrema: Sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $x_0 \in U$ mit $\nabla f(x_0) = 0$

- Hess $f(x_0)$ negativ-definit \Rightarrow isoliertes Maximum in x_0
- Hess $f(x_0)$ negativ-semidefinit in Umgebung von $x_0 \Rightarrow$ lokales Maximum in x_0

3. Lokales Maximum in $x_0 \Rightarrow \text{Hess}f(x_0)$ negativ-semidefinit
4. Analog für Minima...

In diesem Zusammenhang: 'Erinnerung' an den *Satz von Hurwitz*:

$$A > 0 (A \text{ positiv-definit}) \Leftrightarrow \forall k = 1, \dots, n : \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$$

7.5 Harmonische Funktionen

Maximum-Prinzip (vgl. 3.1.2):

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen und nichtleer, $f \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ mit $\Delta f = 0$ in U ('harmonisch in U ').

Dann nimmt f ihr Maximum und ihr Minimum auf dem Rand ∂U an.

Bemerkung:

1. $f \in C^2(U)$ heißt *subharmonisch* in U , falls $\Delta f(x) \geq 0$
2. Für $n = 1$ und $f \in C^2$ gilt: f subharmonisch genau dann wenn f konvex.
3. Für alle n : f konvex $\Rightarrow f$ subharmonisch und $f \in C^2$.

7.6 Konvexe Funktionen

Definition (vgl. 5.5): $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt konvex $\forall x_0, x_1 \in U$ mit $[[x_0, x_1]] \subset U$, $\forall \lambda \in [0, \dots, 1]$:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \quad \forall \lambda \in (0, 1)$$

Falls $f \in C^2(U)$, gilt:

1. f konvex genau dann, wenn $\text{Hess} f(x) \geq 0$ ($\forall x \in U$)
2. f strikt konvex $\Leftrightarrow \text{Hess} f(x) > 0$ ($\forall x \in U$)

7.7 Implizite Funktionen

Es geht in diesem Abschnitt um die Frage: *Kann man die Gleichung $F(x, y) = c$ wenigstens $\forall x$ innerhalb eines bestimmten Intervalls nach y auflösen?*

Zunächst der Satz, der erklärt, wann dies funktioniert:

1. *Satz über implizite Funktionen:*

Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offen, sei $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig diffbar, sei schließlich $a \in U_1$, $b \in U_2$ mit

- a) $F(a, b) = 0$
 b) $\frac{\partial F(a, b)}{\partial y}$ invertierbar

Dann $\exists V_1 \subset U_1, V_2 \subset U_2$ Umgebungen von a bzw. b ; $\exists g : V_1 \rightarrow V_2$ mit $F(x, g(x)) = 0 \forall x \in V_1$; $g(x)$ ist die einzige Lösung, die in V_2 liegt.

2. *Satz über die Differenzierbarkeit impliziter Funktionen:*
 Seien U_1, U_2, F, g wie im obigen Satz.

Dann existieren Umgebungen $\tilde{V}_1 \ni a, \tilde{V}_2 \ni b$ so dass $\forall (x, y) \in \tilde{V}_1 \times \tilde{V}_2$

$g : \tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}_2$ stetig differenzierbar und $\frac{\partial}{\partial y} F(x, y)$ invertierbar ist

und

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))$$

7.8 Gleichmäßige Stetigkeit und Konvergenz

Zu diesem Thema hatten wir hier 3 Sätze, wobei der erste bereits in 4.3.1 bewiesen wurde:

1. Sei (X, d) metrischer Raum, $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn nun $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ($\forall k$), $f_k \rightarrow f$ gleichmäßig auf $X \Rightarrow f$ stetig.
2. Seien $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ($\forall n \in \mathbb{N}$) und $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig konvergent für $n \rightarrow \infty$. Dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

3. Sei X metrischer Raum, $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ 'parameterabhängiges Integral'.

Dann ist F stetig auf X .

7.9 Umkehrsatz und Extrema unter Nebenbedingungen

Der *Umkehrsatz*

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $Df(y_0)$ invertierbar für $y_0 \in U$. Dann \exists offene Umgebung W_2 von y_0 so dass $f : W_2 \rightarrow W_1, W_1 := f(W_2)$ bijektiv ist und stetig differenzierbar. Es gilt

$$D(f^{-1})(x) = (Df(f^{-1}(x)))^{-1} \forall x \in W_1$$

Lokale Extrema unter Nebenbedingungen

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt:

Für jede lokale Extremstelle a von f unter der Nebenbedingung $h = 0$ für die $\nabla f(a) \neq 0$ existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, ein sogenannter *Lagrange-Multiplikator*, mit

$$\nabla f(a) = \lambda \cdot \nabla h(a)$$

7.10 Vertauschbarkeit

7.10.1 Vertauschbarkeit von Limes und Ableitung

Seien $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $f_n \rightarrow f$ punktweise auf $[a, b]$ und $f'_n \rightarrow g$ gleichmäßig auf $[a, b]$.

Dann ist f differenzierbar und $f' = g$, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x) (\forall x \in [a, b]) \text{ oder } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{d}{dx} f_n(x) \right) = \frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)$$

7.10.2 Vertauschbarkeit von Differenziation und Integration

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $i \in \{1, \dots, n\}$ $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

1. $t \mapsto f(x, t)$ stetig auf $[a, b] \forall x \in U$
2. $x \mapsto f(x, t)$ partiell nach x_i differenzierbar auf $U (\forall t \in [a, b])$
3. $(x, t) \mapsto D_{x_i} f(x, t)$ stetig auf $U \times [a, b]$.

Dann ist $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) := \int_a^b f(x, t) dt$ nach x_i stetig partiell differenzierbar, und es gilt:

$$D_{x_i} F(x) = \int_a^b D_{x_i} f(x, t) dt$$

7.11 Potenzial zu Vektorfeld

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, *sternförmig* ($\exists x_0 \in U : \forall x \in U : [x, x_0] \subset U$), $V \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld. Dann gilt:

$$\exists f \in C^2(U, \mathbb{R}) : V = \nabla f$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall i, j : D_j V_i = D_i V_j \text{ (in } n = 3 : \nabla \times V = 0)$$

7.12 Dirichlet-Problem für Laplace-Gleichung im Halbraum

Zunächst wird definiert: der 'Träger von f ' = $\text{supp}(f) :=$ kleinste abgeschlossene Menge A mit $f \equiv 0$ auf $\mathbb{C}A$.

Gegeben ist eine Funktion $f \in C(\mathbb{R}^{n-1})$, außerdem gelten die Bezeichnungen: $x = (\bar{x}, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*$, d.h. $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ (dito für y, \bar{y})

Gesucht wird nun eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap C(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+)$, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\Delta u(x) = 0$ in $\mathbb{R}_+ * \times \mathbb{R}^{n-1}$
2. $\lim_{x \rightarrow (\bar{y}, 0)} u(x) = f(\bar{y})$

Die eindeutige Lösung ist:

$$u(\bar{x}, x_n) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\bar{y}) p_{x_n}(\bar{x} - \bar{y}) \, d\bar{y}, & x_n > 0 \\ f(\bar{x}), & x_n = 0 \end{cases}$$

wobei

$$p_{x_n}(\bar{z}) = \frac{x_n}{(\|z\|^2 + x_n^2)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}}$$

der Poisson-Kern ist.

Hier kommt die *Gamma-Funktion* zum Einsatz, sie ist u.a. definiert als $\Gamma(x) := \int_1^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} \, dt$ und erweitert die Fakultäts-Funktion auf die positiven reellen Zahlen.

Es gelten folgende (mindestens für den Beweis) interessante Bemerkungen:

1. $\left(\Delta_x + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) p_t(\bar{x}) = 0 \quad (\forall t > 0, \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}),$
2. u ist stetig auf $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$,
3. u ist die eindeutige Lösung des Dirichletproblems auf Grund des Maximum-Prinzips (vgl. 7.5).

7.12.1 Wärmeleitungsgleichung

Sei $f \in C(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger. Dann ist die eindeutige Lösung $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+) \cap (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ mit

$$\left(\Delta_x - \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x)$$

Hier gilt:

$$p_t(z) = (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp\left[-\frac{\|z\|^2}{2t}\right]$$

7.13 Euler-Lagrange-Gleichungen und Hamiltonsches Prinzip

Definition:

1. Es gelte

a) *Wirkungsintegral* $S: K \rightarrow \mathbb{R}$, $K := \{\phi \in C^2([a, b]) : \phi(a) = c, \phi(b) = d\}$

b) *Lagrange-Funktion* $\mathcal{L}: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{L} ist C^2 -Funktion. Es gilt stets:

$$S(\phi) = \int_a^b \mathcal{L}(t, \phi(t), \phi'(t)) \, dt$$

2. *Erste Variation* von S in Richtung h im Punkt ϕ ist

$$\delta_h S(\phi) := \frac{d}{d\epsilon} S(\phi + \epsilon \cdot h) |_{\epsilon=0}$$

3. S heißt *stationär* im Punkt ϕ , falls $\delta_h S(\phi) = 0$ ($\forall h \in K_0$) wobei $K_0 := \{\phi \in C^2([a, b]) : \phi(a) = 0, \phi(b) = 0\}$

Dann gilt

1. Falls S ein Minimum in ϕ hat, dann ist S stationär in ϕ .
2. S ist genau dann stationär in ϕ , wenn ϕ die *Euler-Lagrange-Differentialgleichungen* erfüllt (es sei $\phi(t) = y$, $\phi'(t) = p$):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{L}(t, \phi(t), \phi'(t)) = \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{L}(t, \phi(t), \phi'(t))$$

Das *Hamiltonsche Prinzip* besagt, dass eine Bewegung stets so verläuft, dass das zugehörige Wirkungsintegral minimiert wird.

8 Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Definitionen:

1. Eine *gewöhnliche Differenzialgleichung 1. Ordnung* ist eine Gleichung der Form

$$\dot{x} = F(t, x)$$

Dabei soll gelten: $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sei offen, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig.

2. Eine *Lösung* der gewöhnlichen DGL ist eine differenzierbare Funktion $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit I Intervall in $\mathbb{R} : \forall t \in I : (t, \phi(t)) \in U$ und $\dot{\phi}(t) = F(t, \phi(t))$, bzw:

$$\dot{\phi}_i(t) = F_i(t, \phi(t)) \quad (\forall t \in I, \forall i = 1, \dots, n)$$

3. *Gewöhnliche* im Unterschied zu *partiellen* DGL (z.B. $\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \phi(t, x) = F(t, x, \phi(t, x))$) haben nur eine eindimensionale Variable.

4. Eine *gewöhnliche DGL k-ter Ordnung* ist von der Form $x^{(k)} = F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(k-1)})$ Eine solche lässt sich immer auf eine DGL 1. Ordnung mit k zusätzlichen Dimensionen zurückführen.

8.1 Eindeutigkeitsatz

Hierzu zunächst die Definition (vgl. 3.1):

F heißt *lokal Lipschitz-stetig* in der Variablen $x \Leftrightarrow \forall (t, x) \in U : \exists$ Umgebung V mit $F|_V$ Lipschitz-stetig in der Variablen x .

Sei U offen, F stetig und in der x -Variablen lokal Lipschitz-stetig. Sind ψ, ϕ zwei Lösungen der DGL $\dot{x} = F(t, x)$ in einem Intervall I mit $\phi(t_0) = \psi(t_0)$ für ein $t_0 \in I$, so gilt: $\phi(t) = \psi(t) \forall t \in I$.

(Nicht nur?) für den zugehörigen Beweis interessant ist das *Lemma von Gronwall*:

Sei I Intervall, $g : I \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$ stetig mit

$$\exists A, B \geq 0, t_0 \in I : \forall t \in I : g(t) \leq A \cdot \left| \int_{t_0}^t g(s) \, ds \right| + B$$

Dann gilt: $g(t) \leq B \cdot e^{A \cdot (t-t_0)}$

8.2 Existenzsatz von Picard-Lindelöf

Sei U offen, F stetig und lokal Lipschitz-stetig in x Variablen.

Dann gilt $\forall (t_0, x_0) \in U : \exists \epsilon > 0$ und eine Lösung ϕ auf $I = [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ der DGL $\dot{x} = F(t, x)$ mit Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0$. Diese Lösung ist der gleichmäßige Limes der Funktionenfolge $\phi_k : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\phi_0(t) := x_0$,

$$\phi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \phi_k(s)) \, ds \quad (\forall k \in \mathbb{N}_0, t \in I)$$

Nicht nur für den Beweis dieses Satzes benötigt man den

8.3 Banachscher Fixpunktsatz

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $T : X \rightarrow X$ eine *Kontraktion* (für diese gilt: $\exists \lambda < 1 : d(T\phi, T\psi) \leq \lambda \cdot d(\phi, \psi)$).

Dann $\exists!$ Fixpunkt $\bar{x} \in X$ mit $T(\bar{x}) = \bar{x}$.

$\forall x_0 \in X$ gilt: $x_k \rightarrow \bar{x}_0$ in X für $k \rightarrow \infty$, falls man iterativ definiert: $x_{k+1} = T(x_k)$

8.4 Lösungsverfahren 1: Separation der Variablen

Fakten:

Sei U offen, F stetig und lokal Lipschitz-stetig in x Variablen.

1. Eine Lösung $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ von

$$\dot{x} = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

zu vorgegebenen $(t_0, x_0) \in U$ heißt *Maximallösung*, wenn für jede andere Lösung $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ der DGL gilt: $J \subset I$ und $\phi|_J = \psi$.

- $\forall (t_0, x_0) \in U$ existiert genau eine Maximallösung der DGL (definiert auf einem offenen, eindeutigen Intervall I).
- Sei $\phi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ Maximallösung. Falls $b \neq \infty$, so verlässt die Kurve $(t, \phi(t))$ jedes Kompaktum $K \in U$ immer wieder für $t \nearrow b$, d.h.

$$\forall K \text{ kompakt } \subset U, \forall \beta < b : \exists t \in]\beta, b[: (t, \phi(t)) \notin K$$

Analog für $t \searrow a$, falls $a \neq -\infty$.

- Es sei zusätzlich $U = I \times \mathbb{R}^n$ und F sei *linear beschränkt* im folgenden Sinne:

$$\forall \alpha, \beta \in I : \exists C_0, C_1 : \forall t \in [\alpha, \beta], \forall x \in \mathbb{R}^n : |F(t, x)| \leq C_0 + C_1|x|$$

Dann existiert die Maximallösung auf ganz I .

Lösungsverfahren 1: *Separation der Variablen*

Hierzu am einfachsten ein Beispiel:

$\dot{x} = x^2 \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = x^2$ nun wird mit den Differentialen gerechnet, als wären es normale Brüche: $\Rightarrow \frac{1}{x^2} dx = dt$, und nun kann man integrieren:
 $\int \frac{1}{x^2} dx = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{x} + C = t \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{C-t}$

8.5 Lineare gewöhnliche Differenzialgleichungen

Eine gewöhnliche DGL (s.o.) heißt genau dann linear, wenn F von der Form ist: $F(t, x) = A(t) \cdot x + b(t)$, wobei

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}), \quad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \text{ Man definiert:}$$

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, sei $I \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $A : I \rightarrow \text{Mat}(n, \mathbb{K})$, $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ jeweils punktweise stetig.

Die DGL $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$ heißt

- die zu (A, b) assoziierte *lineare Differenzialgleichung*
- homogen*, falls $b = 0$, sonst *inhomogen*.

Außerdem bezeichnet man die Menge aller Lösungen der inhomogenen DGL mit \mathcal{L}_{inh} , sowie die Menge der Lösungen des homogenen Systems mit \mathcal{L}_{hom} .

Es gilt dann:

- Sei $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}^n$. Dann existiert genau eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ von $\left. \begin{array}{l} y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right\}$
- Sei nun $n = 1$, der Rest identisch, des Weiteren $a(t) := a_{11}(t)$. Dann ist die Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ explizit gegeben durch:

$$y(t) = y_k(t) \cdot \left(y_0 + \int_{t_0}^t b(s) \cdot y_k^{-1}(s) ds \right) \text{ mit } y_k(t) = \exp \left[\int_{t_0}^t a(s) ds \right]$$

3. \mathcal{L}_{hom} ist ein n -dimensionaler Vektorraum.

4. Eine Basis $(y_i)_{i \leq n}$ von \mathcal{L}_{hom} heißt *Fundamentalsystem*.

5. $\mathcal{L}_{inh} = \bar{y} + \mathcal{L}_{hom} \forall \bar{y} \in \mathcal{L}_{inh} \Leftrightarrow \mathcal{L}_{inh} = \left\{ \bar{y} + \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\}$

6. Sei alles wie zuvor definiert, sei $M(t) \in Mat(n, \mathbb{K})$, $M(t) = \begin{pmatrix} (y_1(t))_1 & \dots & (y_n(t))_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_1(t))_n & \dots & (y_n(t))_n \end{pmatrix}$.

Dann existiert $M(t)^{-1}, \forall t \in I$ und für jedes $v \in \mathbb{K}^m$ ist $\bar{y} \in \mathcal{L}_{inh}$, wobei

$$\bar{y}(t) = M(t) \cdot \left(\int_{t_0}^t M(s)^{-1} \cdot b(s) \, ds + v \right)$$

7. Sei $\dot{x}(t) = g(t) \cdot h(x(t))$ gegeben mit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $h \neq 0$. Wähle $(t_0, x_0) \in I \times J$, und definiere schließlich:

$$G(t) = \int_{t_0}^t g(s) \, ds, \quad H(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{h(y)} \, dy$$

Dann gilt für $I' \subset I$ mit $t_0 \in I'$ und $G(I') \subset H(J) : \exists!$ Lösung $\phi : I' \rightarrow \mathbb{R}$ der DGL mit $\phi(t_0) = x_0$. Diese ist gegeben durch:

$$\phi(t) = H^{-1}(G(t))$$

8.5.1 Lösungsverfahren 2: Variation der Konstanten

Man löst inhomogene lineare DGL(-Systeme) falls man schon die Lösung der homogenen DGL (des homogenen Systems) kennt mit Hilfe der Methode der *Variation der Konstanten*:

Sei $(y_i)_i$ Fundamentalsystem von Lösungen der DGL. Ansatz:

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) \cdot y_i(t)$$

eine kurze und schmerzlose Rechnung ergibt:

$$\sum_i c_i'(t) \cdot y_i(t) = b(t) \Leftrightarrow M(t) \cdot c'(t) = b(t) \Rightarrow c'(t) = M^{-1}(t)b(t)$$

wobei nach dem Äquivalenzpfeil auf die oben bereits definierte Matrizen-Schreibweise zurückgegriffen wurde. Eine einfache Integration liefert somit $c(t)$.

Eine andere Sichtweise liefert der *Propagator*:

1. Die Lösungen ϕ der homogenen DGL $\dot{\phi} = A \cdot \phi$ bilden einen n -dimensionalen \mathbb{K} -

Vektorraum mit der Basis $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \dots & \phi_{nn} \end{pmatrix}$ hierbei gilt:

(ϕ_1, \dots, ϕ_n) sind linear unabhängig $\Leftrightarrow \det \Phi(t) \neq 0 (\forall t \in I) \Leftrightarrow \det \Phi(t_0) \neq 0$.

Ferner gilt $\dot{\Phi} = A \cdot \Phi$, und mit dem *Propagator*:

$$\Phi(s, t) := \Phi(t) \cdot \Phi(s)^{-1} \quad (\forall s \leq t)$$

die Lösung ϕ der homogenen DGL (s.o) mit $\phi(t_0) = x_0$ ist gegeben durch

$$\phi(t) = \Phi(t, t_0) \cdot x_0$$

2. Ist $\bar{\Psi}$ eine Lösung der inhomogenen DGL $\dot{\bar{\Psi}} = A\bar{\Psi} + b$, so gilt für jede andere Funktion Ψ : Ψ ist Lösung von $\dot{\Psi} = A\Psi + b \Leftrightarrow \Psi \in \bar{\Psi} + \mathcal{L}$. Es gilt:

$$\Psi(t) = \Phi(t) \cdot \left(\int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} b(s) \, ds + \Phi(t_0)^{-1} x_0 \right) = \int_{t_0}^t \Phi(s, t) b(s) \, ds + \Phi(t_0, t) x_0$$

8.5.2 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Gegeben ist folgende (homogene) DGL:

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \cdot \dot{x}(t) + a_0 \cdot x(t) = 0$$

mit den Konstanten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $a_n := 1$. Man betrachtet hierzu ein Polynom $P \in \mathbb{C}(D)$:

$$P(D) := D^n + a_{n-1} \cdot D^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot D + a_0$$

damit kann man dann die DGL also auch so schreiben: $P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) x(t) = 0$.

- $\forall \lambda \in \mathbb{C} : P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) e^{(\lambda t)} = P(\lambda) \cdot e^{(\lambda t)}$
- Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ Nullstellen von P , so sind $\phi_1(t) \cdot e^{\lambda_1 t}, \dots, \phi_k(t) \cdot e^{\lambda_k t}$ Lösungen der DGL.
- Ist $k = n$ und sind alle λ_i von einander verschieden, so bilden (ϕ_1, \dots, ϕ_n) ein (Lösungs-)Fundamentalsystem der DGL.
- Das Polynom P habe die paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit Vielfachheiten r_1, \dots, r_k (dabei $r_1 + \dots + r_k = n$).

Dann bilden die Funktionen

$$\begin{array}{ccccccc} \phi_{11} = e^{\lambda_1 t} & \phi_{12} = t \cdot e^{\lambda_1 t} & \dots & \phi_{1r_1} = t^{r_1-1} \cdot e^{\lambda_1 t} & & & \\ \phi_{21} = e^{\lambda_2 t} & \phi_{22} = t \cdot e^{\lambda_2 t} & \dots & \phi_{2r_2} = t^{r_2-1} \cdot e^{\lambda_2 t} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ \phi_{k1} = e^{\lambda_k t} & \phi_{k2} = t \cdot e^{\lambda_k t} & \dots & \phi_{kr_k} = t^{r_k-1} \cdot e^{\lambda_k t} & & & \end{array}$$

ein Fundamentalsystem der obigen DGL.

9 Maßtheorie und Lebesgue-Integration

9.1 Definitionen der Maßtheorie

9.1.1 σ -Algebra

Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A} \in P(\Omega)$ die Messbaren Mengen und $\mu : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}_+$ ein Maß. \mathcal{A} heißt σ -Algebra auf Ω , falls:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $B \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}B \in \mathcal{A}$
3. $B_n \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$

Man nennt (Ω, \mathcal{A}) Messraum und die Mengen $B \in \mathcal{A}$ messbar. Für eine σ -Algebra \mathcal{A} gilt:

1. Ist $B_n \in \mathcal{A}$ so auch $\bigcup_n B_n = \mathcal{C} \left(\bigcap_n \mathcal{C}B_n \right)$ und $\bigcup_n \bigcap_{k \geq n} B_k$
2. Die einfachsten σ -Algebren sind $P(\Omega)$ und $\{\emptyset, \Omega\}$.
3. Sind \mathcal{A}_i σ -Algebren, so auch $\mathcal{A} = \bigcap_i \mathcal{A}_i$

Eine wichtige σ -Algebra ist die Borelsche σ -Algebra $\mathcal{B}(\Omega) = \sigma(\{U \subset \Omega : U \text{ offen}\})$ Speziell gilt für $\Omega = \mathbb{R} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}\})$

9.1.2 Maß, Lebesguemaß

Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \mapsto [0, \infty]$ heißt Maß auf dem Messraum (Ω, \mathcal{A}) falls gilt:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n$ für alle $B_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $B_n \cap B_k = \emptyset$ für $n \neq k$

Man nennt $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum
 μ heißt

- endlich, falls $\mu(\Omega) < \infty$
- σ -endlich, falls für $\Omega_n \in \mathcal{A}$ mit $\mu(\Omega_n) < \infty$ gilt $\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n \right) < \infty$
- Wahrscheinlichkeitsmaß, falls $\mu(\Omega) = 1$
- Lebesguemaß, falls $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\mu(]a, b]) = b - a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$

Für jedes Maß μ auf (Ω, \mathcal{A}) gilt

1. $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
2. $\forall A, B \in \mathcal{A} : \mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$
3. $\forall A, B \in \mathcal{A} : \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$
4. $\forall A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} : \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Man setzt $\sigma(\mathcal{A}_0) = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra, } \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}\}$. \mathcal{A}_0 heißt *Erzeuger* von $\sigma(\mathcal{A}_0)$. Gilt zusätzlich $\forall A, B \in \mathcal{A}_0 : A \cap B \in \mathcal{A}_0$, so heißt \mathcal{A}_0 \cap -stabiler Erzeuger.

9.1.3 Prämaß

Eine Menge $\mathcal{A} \subset P(\Omega)$ heißt *Algebra* auf Ω falls:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \complement A \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \mapsto [0, \infty]$ auf einer Algebra \mathcal{A} heißt *Prämaß* falls:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\forall A_n \in \mathcal{A}$ disjunkt mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

9.2 Fortsetzungen von Maßen

9.2.1 Eindeutigkeit der Maßfortsetzung

Seien μ_1 und μ_2 Maße auf (Ω, \mathcal{A}) , \mathcal{A}_0 sei ein \cap -stabiler Erzeuger und es existieren $\Omega_n \in \mathcal{A}_0$ mit $\Omega_n \nearrow \Omega$, $\mu_1(\Omega_n) < \infty$ und $\mu_2(\Omega_n) < \infty$. Gilt außerdem $\mu_1(A) = \mu_2(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}_0$, so ist $\mu_1 = \mu_2$ auf ganz \mathcal{A} .

9.2.2 Fortsetzungssatz von Carathéodory

Sei μ_0 ein σ -endliches Prämaß auf einer Algebra \mathcal{A} . Dann existiert genau ein Maß μ auf $\sigma(\mathcal{A})$ mit $\mu_0(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$

9.3 Messbare Funktionen

Seien (Ω, \mathcal{A}) und (Ω', \mathcal{A}') zwei Maßräume. Dann heißt eine Abbildung $f : \Omega \mapsto \Omega'$ *messbar*, genauer \mathcal{A}/\mathcal{A}' -messbar, falls $\forall A' \in \mathcal{A}' : f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$. Hierbei ist $f^{-1}(A') := \{x \in \Omega : f(x) \in A'\}$. Eine $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Abbildung $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ heißt messbare Funktion.

Alle stetigen Funktionen sind messbar.

Seien f_n messbare Funktionen, dann sind auch messbar

1. $F_k = \sum_{n=1}^k f_n$
2. $F_\infty = \sum_{n=1}^\infty f_n$
3. $f_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$
4. $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$
5. $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$

Eine Funktion f heißt *elementar messbar* falls gilt $f = \sum_{n=1}^k a_n 1_{A_n}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ und A_k messbar.

Jede messbare Funktion f lässt sich durch elementar messbare Funktionen approximieren, das heißt es existieren elementar messbare f_n mit $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

9.4 Definition des Integrals

Hier seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ eine messbare Funktion.

9.4.1 Integral einer Indikatorfunktion

Man definiert das Integral einer Indikatorfunktion $f = 1_A$ als

$$\int 1_A \, d\mu := \mu(A)$$

9.4.2 Integral einer Elementarfunktion

Sei $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{A_i}$ mit $k \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{A}$, $\alpha_i \in [0, \infty[$. Seien o.B.d.A A_i disjunkt (immer möglich). Dann ist das Integral definiert als:

$$\int f \, d\mu := \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i)$$

9.4.3 Integral einer nicht-negativen Funktion

Sei $f : \Omega \mapsto \bar{\mathbb{R}}_+$. Dann existiert eine Folge von elementar messbaren Funktionen f_n mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$. Man definiert das Integral von f dann als:

$$\int f \, d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \sup_n \int f_n \, d\mu$$

9.4.4 Integral einer messbaren Funktion

Sei $f : \Omega \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Ferner seien $f_+ = \max\{f, 0\}$ und $f_- = \max\{-f, 0\}$. f heißt *integrierbar*, falls $\int |f| \, d\mu < \infty$. In diesem Fall setzt man das *Integral* von f als:

$$\int f \, d\mu := \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu$$

Für $A \in \mathcal{A}$ definiert man

$$\int_A f \, d\mu := \int 1_A \cdot f \, d\mu$$

Man bezeichnet mit $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ die Menge aller reellwertigen μ -integrierbaren Funktionen.

Unterscheiden sich zwei Funktionen nur auf einer Nullmenge (Menge mit dem Maß 0), so sind ihre Integrale gleich.

9.5 Bezeichnung zur Integration

1. Eine messbare Menge A heißt *Nullmenge*, falls $\mu(A) = 0$.
2. Eine Eigenschaft heißt *μ -fast-überall*, falls sie nur auf einer Nullmenge nicht gilt.
3. $\int f \, d\mu = \int_{\Omega} f(x) \, d\mu(x) = \int \Omega f(x) \, \mu(dx)$
4. Für das Lebesgue-Maß im \mathbb{R}^n : $\int f \, d\mu = \int f(x) \, dx = \int f(x) \, d^n x$
Im \mathbb{R} : $\int_a^b f(x) \, dx := \int 1_{[a,b]} f \, d\mu = \int 1_{]a,b[} f \, d\mu$

9.6 Die Konvergenzsätze

9.6.1 Satz von der monotonen Konvergenz (Satz von Beppo Levi)

Sei f_n eine Folge monoton wachsender messbarer nicht-negativer Funktionen. Dann ist:

$$\int \left(\sup_n f_n \right) \, d\mu = \sup_n \int f_n \, d\mu$$

beziehungsweise

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$$

9.6.2 Lemma von Fatou

Sei f_n ein beliebige Folge nicht-negativer messbarer Funktionen, so ist

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$$

9.6.3 Satz von der majorisierten Konvergenz (Satz von Lebesgue)

Seien $f, f_n : \Omega \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ messbar mit $f_n \rightarrow f$ (μ -fast-überall) und es existiert eine integrierbare Funktion $g : \Omega \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ mit $|f_n| \leq g$ (μ -fast-überall). Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu$$

9.7 Fundamentalsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit der beschränkten Ableitung f' . Dann ist f' integrierbar und es gilt:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$$

9.8 Bildmaße

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und (Ω', \mathcal{A}') ein Messraum. Sei $\Psi : \Omega \mapsto \Omega'$ eine messbare Abbildung. Dann ist das *Bildmaß* $\mu' = \Psi_*\mu$ von μ unter Ψ auf (Ω', \mathcal{A}') definiert als

$$\mu'(A') := \mu(\Psi^{-1}(A')) \quad \forall A' \in \mathcal{A}'$$

Für die die Integration mit Bildmaßen gilt:

1. $\int_{\Omega'} f \, d\mu' = \int_{\Omega} (f \circ \Psi) \, d\mu$, falls $f \geq 0$ oder μ' -integrierbar
2. f ist μ' -integrierbar $\Leftrightarrow f \circ \Psi$ ist μ -integrierbar

9.9 Mehrdimensionale Integration

9.9.1 Produktmaß

Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume. Dann definiert man auf dem Produkttraum $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ die Produkt- σ -Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\})$, sowie das eindeutig festgelegte *Produktmaß* $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ auf (Ω, \mathcal{A}) mit $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$, $\forall A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$.

μ heißt *Lebesgue-Borel-Maß* auf \mathbb{R}^n falls μ Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ ist und gilt

$$\mu(]s_1, t_1] \times \dots \times]s_n, t_n]) = \prod_{i=1}^n t_i - s_i$$

Erweitert man dieses Maß auf die Vervollständigung $\mathcal{B}^*(\mathbb{R}^n)$ von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ so erhält man das *Lebesgue-Maß*.

Im folgen wird, sofern nichts anderes angegeben ist, das Lebesgue-Maß μ_n auf dem \mathbb{R}^n betrachtet.

9.9.2 Satz von Fubini

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit einem Produktmaß wie eben. Sei $f : \Omega \mapsto \mathbb{R} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Dann ist $f(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $f(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$. Es gilt für dieses f oder $f \geq 0$ messbar:

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} f(x, y) \, d\mu_2(y) \right] d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} f(x, y) \, d\mu_1(x) \right] d\mu_2(y)$$

9.9.3 Cavalierisches Prinzip

Sei $K \in \mathbb{R}^n$ messbar und $\forall t \in \mathbb{R}$ sei $K_t = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (y, t) \in K\}$ der t -Schnitt von K . Dann ist $\mu_n(K) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{n-1}(K_t) \, dt$. Insbesondere gilt für alle K, L falls $\mu_{n-1}(K_t) = \mu_{n-1}(L_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}^n$ so gilt auch $\mu_n(K) = \mu_n(L)$.

9.9.4 Transformationsformel

Sei $\Psi(x) = Ax + b$ eine affin-lineare Abbildung auf dem \mathbb{R}^n . Dann gilt für das Bildmaß $\Psi_*\mu_n$:

$$\Psi_*\mu_n = \frac{1}{\det A} \mu_n$$

Für die Integration auf dem \mathbb{R}^n gilt damit die *Transformationsformel*:

$$\int_K f(\Psi(x)) |\det A| \, d\mu(x) = \int_{\Psi(K)} f(x) \, d\mu(x)$$

Im eindimensionalen Fall entspricht dies genau der Substitutionsregel, da dann $\Psi' = \det A$.

9.9.5 Transformationssatz

$U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Psi : U \rightarrow V$ *Diffeomorphismus*, dh. Ψ bijektiv, $\Psi, \Psi^{-1} \in C^1$. Dann $D(\Psi^{-1}(y)) = [D\Psi(x)]^{-1}$ (also die inverse Matrix) ($\forall y = \Psi(x) \in V$ bzw. alle $x = \Psi^{-1}(y) \in U$) Hier meint $D\Psi$ wieder die *Jacobi-* oder *Funktionalmatrix*. Dann gilt für alle integrierbaren $f : V \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_V f(y) \, d\mu_n(y) = \int_U f(\Psi(x)) \cdot |\det D\Psi(x)| \, d\mu_n(x)$$

Dabei: f ist integrierbar auf $V \Leftrightarrow (f \circ \Psi) \cdot |\det D\Psi|$ integrierbar auf U .

9.9.6 Integration rotations-symmetrischer Funktionen

Sei $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ die Kugel um x mit dem Radius r . Dann ist τ_n definiert als $\mu_n(B_r(x)) = \tau_n \cdot r^n$.

1. $\tau_n = \frac{2\pi}{n} \tau_{n-2}$
2. $\tau_{2n} = \frac{1}{n} \pi^n$ und $\tau_{2n+1} = \frac{2^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \pi^n$
3. $\tau_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

Für jede messbare Funktion $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|) \, d\mu_n(x) = n \cdot \tau_n \int_0^\infty f(t) t^{n-1} \, dt$$

9.9.7 Vergleich zum Riemann-Integral

Ist eine Funktion Riemann-Integrierbar, so ist sie auch Lebesgue integrierbar, und die Integrale stimmen überein. Die Umkehrung gilt allerdings nicht: nicht jede Lebesgue-Integrierbare Funktion ist auch Riemann-Integrierbar. Auch bei „uneigentlicher Riemann-Integration“ muss man aufpassen: hier stimmen Riemann und Lebesgue-Integral nicht notwendigerweise mit einander überein!

9.10 Lebesgue-Räume

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(\Omega) &= \left\{ f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, f \text{ messbar, } \int_{\Omega} |f| \, d\mu < \infty \right\} \\ \mathcal{L}^p(\Omega) &= \left\{ f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, f \text{ messbar, } \left(\int_{\Omega} |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \text{ für } 1 < p < \infty \\ \mathcal{L}^\infty(\Omega) &= \left\{ f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, f \text{ messbar, } \inf_{\mu(N)=0} \sup_{\Omega \setminus N} |f(x)| < \infty \right\} \end{aligned}$$

Diese $\mathcal{L}^p(\Omega)$ Räume sind Vektorräume.

Leider ist $\|\cdot\|_1$ nur eine Halbnorm auf diesen (es folgt nicht für $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f \equiv 0$), daher die neuen Definitionen:

$$\begin{aligned} N_p &= \{f \in \mathcal{L}^p(\Omega), \|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0\} \\ L^p(\Omega) &= \{[f] \subset \mathcal{L}^p(\Omega); g - h \in N_p \, \forall g, h \in [f]\} \end{aligned}$$

Diese $L^p(\Omega)$ -Räume sind Banachräume, d.h. es sind vollständige, normierte Vektorräume.

9.10.1 Young-, Hölder-, Minkowski- und Jensen - Ungleichungen

Es gelte $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

- *Youngsche Ungleichung:* Sei $a \geq 0, b \geq 0$:

$$a \cdot b \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

- *Höldersche Ungleichung:* Sei $f \in \mathcal{L}^p(\Omega), g \in \mathcal{L}^q(\Omega) (\Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\Omega))$, dann gilt:

$$\|f \cdot g\| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

für $p = q = 2$ ist dies die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*

- *Minkowski-Ungleichung:* Sei $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty (\Leftarrow f + g \in \mathcal{L}^p(\Omega))$, dann gilt:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

- *Jensen-Ungleichung:* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit $\mu_n(\Omega) < \infty$, sei $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, dann gilt:

$$\phi \left(\frac{\int_{\Omega} f \, d\mu_n}{\mu(\Omega)} \right) \leq \frac{\int_{\Omega} \phi \circ f \, d\mu_n}{\mu(\Omega)}$$

9.11 Faltung auf dem \mathbb{R}^n

Definition: $\forall f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^*, \mathbb{B}^*(\mathbb{R}^n), \mu)$, kurz: $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) \, d\mu_n(y) \text{ falls existent.}$$

Es gilt: Die Faltung definiert eine Abbildung $L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^n), (f, g) \mapsto f \star g$ mit

1. $\int f \star g \, d\mu_n = \int f \, d\mu_n \cdot \int g \, d\mu_n$ und insbesondere $\|f \star g\|_1 = \|f\| \cdot \|g\|_1$
2. die Faltung ist

- kommutativ
- assoziativ
- distributiv: $(f \star (g + h)) = (f \star g) + (f \star h)$
- außerdem gilt: $f \star (\lambda \cdot g) = \lambda \cdot (f \star g)$

Die angenehmste Eigenschaft der Faltung ist, dass man eine beliebige Funktion durch Faltung mit einer $C^k(\mathbb{R}^n)$ -Funktion zu einer $C^k(\mathbb{R}^n)$ -Funktion macht:

Sei $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ für ein $k \in \mathbb{N}^0$ mit $D^\alpha g$ beschränkt (\forall Multiindizes α mit $|\alpha| \leq k$). Dann gilt $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$f \star g \in C^k(\mathbb{R}^n) \text{ und } D^\alpha (f \star g) = f \star (D^\alpha g)$$

9.12 Dirac-Folgen

Eine Folge $(\Psi_k)_{k \in \mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt *Dirac-Folge*, falls

1. $\forall k \in \mathbb{N} : \Psi_k \geq 0, \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_k \, d\mu_n = 1$
2. $\forall r > 0 : \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} \Psi_k \, d\mu_n \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$

(bekanntestes) Beispiel für eine Dirac-Folge:

$$\Psi(x) = \begin{cases} c \cdot \exp\left[-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right], & \|x\| < 1 \\ 0, & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

Es gilt: $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) : f_k \rightarrow f$ in L^1 mit $f_k := f \star \Psi_k$. Falls $\Psi_k \in C^\infty$, so auch $f_k \in C^\infty$.

9.12.1 Approximationssatz von Weierstraß

Jedes $f \in C(\mathbb{R}^n)$ lässt sich auf jeder kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ gleichmäßig durch Polynome approximieren.

9.12.2 parameterabhängige Lebesgue-Integrale

Sei $f : A \times B \mapsto \mathbb{R}$, mit $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$, messbar. Ferner sei

1. $\forall y \in B$ ist $x \mapsto f(x, y)$ stetig auf A
2. $\forall x \in A$ ist $y \mapsto f(x, y)$ integrierbar auf B , und $\exists g \in \mathcal{L}^1(B, \mu_n) : |f(x, y)| \leq g(y) \quad \forall x, y$.

Dann ist die Funktion $F : A \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \int_B f(x, y) \, dy$ stetig auf A

9.12.3 Differenzierbarkeit unter dem Integral

Sei nun A offen $\subset \mathbb{R}^n$, B messbar $\subset \mathbb{R}^m$ und $f : A \times B \mapsto \mathbb{R}$ mit

1. $\forall y \in B$ ist $x \mapsto f(x, y)$ stetig differenzierbar auf A
2. $\forall x \in A$ ist $y \mapsto f(x, y)$ integrierbar auf B
3. $\exists g \in \mathcal{L}^1(B, \mu_m) : \forall x \in A, \forall y \in B, \forall \nu = 1, \dots, n : \left| \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x, y) \right| \leq g(y)$

Dann ist $F = \int_B f(x, y) \, dy$ stetig diffbar auf A mit $\frac{\partial}{\partial x_\nu} F = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x, y) \, dy$

10 Fourierintegrale

10.1 Periodische Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ heißt *L-periodisch* falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = f(x + L)$.

Im folgenden sei stets $L = 2\pi$.

Es ist äquivalent die Funktionen auf $[0, 2\pi[$ zu betrachten. Wir betrachten den komplexen Hilbertraum $L^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi[, \mu_1) = \{f = u + iv : u, v \in L^2([0, 2\pi[, \mu_1)\}$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\bar{x})g(x) dx$

Die Funktionen $e_k(x) = e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$ bilden ein Orthonormalsystem auf diesem Hilbertraum.

10.2 Fourierreihen

Für alle $f \in L^1_{\mathbb{C}}([0, 2\pi[, \mu_1)$ heißen die komplexen Zahlen $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx$ *Fourier-Koeffizienten* von f und $S(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x)$ mit $S_N(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$ heißt *Fourier-Reihe*.

Die S_N lassen sich auch schreiben als $S_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$ mit $a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kx) f(x) dx$ und $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(kx) f(x) dx$

10.3 Besselsche Ungleichung und Parsevalsche Gleichung

10.3.1 Besselsche Ungleichung

Sei H ein Hilbertraum, $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem auf H . Dann gilt für alle $f \in H$, $c_k := \langle e_k, f \rangle$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2$$

10.3.2 Parsevalsche Gleichung

Für alle Hilberträume H und Orthonormalsysteme $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sind äquivalent:

1. $\forall f \in H : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2$
2. $\forall f \in H : f_N = \sum_{k=-N}^N \langle e_k, f \rangle e_k \rightarrow f \in H$
3. $\forall g \in H : \forall k \in \mathbb{Z} : \langle g, e_k \rangle = 0 \Rightarrow g = 0$

In diesem Fall heißt $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ *vollständiges Orthogonalsystem*

Die Funktionen $\{e_k(x) = e^{ikx}\}$ bilden ein vollständiges Orthogonalsystem auf $H = L^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi[, \mu_1)$. Es gilt $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$ mit den Fourierkoeffizienten $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx$

10.4 Fouriertransformation

Die Fourier-Transformierte \widehat{f} einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x \rangle} f(x) \, dx$$

10.4.1 Rechenregeln

Für alle $f, g \in L^1_{\mathbb{C}}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $a \in \mathbb{R}^n$ gilt:

1. $g(x) = f(\lambda x) \Rightarrow \widehat{g}(\xi) = \frac{1}{|\lambda|^n} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$
2. $g(x) = f(x - a) \Rightarrow \widehat{g}(\xi) = e^{-i\langle a, \xi \rangle} \cdot \widehat{f}(\xi)$
3. $\widehat{f \star g} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{f} \cdot \widehat{g}$
4. $\widehat{f} \cdot g$ und $f \cdot \widehat{g}$ sind L^1 und $\int \widehat{f} \cdot g \, dx = \int f \cdot \widehat{g} \, dx$
5. Ist $f \in C^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ so gilt $\forall \nu = 1, \dots, n : \widehat{D_{\nu} f}(\xi) = i \cdot \xi_{\nu} \cdot \widehat{f}(\xi)$
6. Ist $x \mapsto x_{\nu} \cdot f(x)$ in L^1 , so ist \widehat{f} nach ξ_{ν} stetig partiell differenzierbar mit: $\widehat{x_{\nu} f(x)} = i \cdot D_{\nu} \widehat{f}$

10.4.2 Umkehrsatz

Sei $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, dass auch $\widehat{f} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$. Setze $f_0(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} \widehat{f}(\xi) \, d\xi$. Dann ist $f_0 \in C_b$ und $f = f_0$ μ -fast-überall.

10.4.3 Satz von Plancherel

Man erweitert die Fourier-Transformation auf L^2 :

Man benennt diese erweiterte Fouriertransformation folgendermaßen:

$$\mathcal{F} : L^1 \rightarrow C_b, f \mapsto \mathcal{F}f := \widehat{f}$$

Es gilt $\overline{\mathcal{F}f}(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x)$, und damit kann man den Umkehrsatz auch schreiben als: $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = id$, falls $f, \widehat{f} \in L^1$.

Damit kann man nun den *Satz von Plancherel* formulieren:

Es gibt einen eindeutigen Isomorphismus $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$ mit

1. $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$ ($\forall f \in L^2$)
2. $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ ($\forall f \in L^2 \cap L^1$)
3. $\mathcal{F}^{-1}g(x) = \widehat{g}(-x)$ μ -fast überall ($\forall g \in L^2 \cap L^1$)

11 Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt k -dimensionale *Untermannigfaltigkeit* (im Folgenden *UMF*) der Klasse C^α ($\alpha \in \mathbb{N}$) wenn die vier folgenden, äquivalenten Definitionen zutreffen: relativ-offen

1. *lokale Nullstellenmenge*:

$$\forall a \in M : \exists U \text{ offen } \subset \mathbb{R}^n, a \in U, f \in C^\alpha(U, \mathbb{R}^{n-k}), \text{rg } Df(a) = n - k, M \cap U = \{f = 0\}$$

2. *lokal diffeomorph zu \mathbb{R}^k* :

$$\forall a \in M : \exists U \text{ offen } \subset \mathbb{R}^n, a \in U, F \in C^\alpha(U, \mathbb{R}^n) \text{ diffeomorph, } F : U \rightarrow V \text{ so dass } F(U) \subset \mathbb{R}^n, F(M \cap U) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) \cap V$$

3. *lokaler Graf*:

$$\forall a \in M : \exists \text{ Permutation } \pi \text{ von } \{1, \dots, n\}, \exists \text{ offene Umgebungen}$$

$$\begin{cases} U' \subset \mathbb{R}^k, & U' \ni (a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(k)}) \\ U' \subset \mathbb{R}^{n-k} & U'' \ni (a_{\pi(k+1)}, \dots, a_{\pi(n)}) \end{cases} \exists g \in C^\alpha(U', U''),$$

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', g(x')) : x' \in U'\}$$

4. *lokale Parameterdarstellung*:

$$\forall a \in M \exists \text{ relativ-offene Menge } V \subset M, a \in V, T \subset \mathbb{R}^k \text{ offen, } C^\alpha\text{-Immersion } \phi : T \rightarrow \mathbb{R}^n (\text{rg } \phi = k \text{ auf } T) \text{ mit } \phi : T \rightarrow V \text{ Homöomorphismus.}$$

Hier wurden bereits einige Begriffe verwendet, die jetzt definiert werden:

$M \subset \mathbb{R}^n$ mit induzierter Metrik $d_M(x, y) = d(x, y) \forall x, y \in M$ ist metrischer Raum.

Dann definiert man die *Relativ-Topologie*: $V \subset M$ *offen relativ zu M* : $\Leftrightarrow V \subset (M, d_M)$

offen, d.h. $\forall a \in V, \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(a) \cap M \subset V$

Außerdem definiert man:

1. M_1, M_2 metrische Räume, $\Psi : M_1 \rightarrow M_2$ heißt *Homöomorphismus* : $\Leftrightarrow \Psi$ bijektiv, Ψ, Ψ^{-1} stetig.
2. $T \subset \mathbb{R}^k$ offen, $P = (P_1, \dots, P_n) : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Immersion* : $\Leftrightarrow \text{rg } Df(t) = k \forall t \in T$.

Nun kann man einige weitere, nützliche Dinge definieren:

- *Kartenwechsel*: $\tau = \phi^{-1} \circ \tilde{\phi} : \tilde{T}_0 \rightarrow T_0$ mit $\tilde{T}_0 = \tilde{\phi}^{-1}(V \cap \tilde{V}), T_0 = \phi^{-1}(V \cap \tilde{V})$
- Sei $\phi : T \rightarrow V$ eine Karte ($T \subset \mathbb{R}^k$ offen; $V \subset M$ relativ-offen $\subset \mathbb{R}^n$)

1. Man nennt die symmetrische Matrix $G(t)$ *Maßtensor* mit $G(t) = (g_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,k} =$

$$(D\phi(t))^t \cdot (D\phi(t)) \quad \forall t \in T \quad g_{ij}(t) := \left\langle \frac{\partial \phi(t)}{\partial t_i}, \frac{\partial \phi(t)}{\partial t_j} \right\rangle = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial \phi_\nu(t)}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial \phi_\nu(t)}{\partial t_j}$$

2. *Gramsche Determinante*: $g : T \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) := \det G(t)$

Es gilt:

1. $\phi : T \rightarrow V$, $\tilde{\phi} : \tilde{T} \rightarrow \tilde{V}$ Karten mit $\exists \xi \in V \cap \tilde{V}$ und Kartenwechsel $\tau : \tilde{T}_0 \rightarrow T_0$, $T_0 = \phi^{-1}(V \cap \tilde{V})$, $\tilde{T}_0 = \tilde{\phi}^{-1}(V \cap \tilde{V})$.
Dann gilt: $\tilde{g}(\xi) = |\det D\tau(\xi)|^2 \cdot g(\tau(\xi))$ für $\xi \in \tilde{T}_0$
2. $g = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left(\det \frac{\partial(\phi_{i_1}, \dots, \phi_{i_k})}{\partial(t_1, \dots, t_k)} \right)^2 \geq 0$

11.1 Integrale auf Untermannigfaltigkeiten

1. Wähle *Atlas* $\phi_i : T_i \rightarrow M_i$ mit $\bigcup_{i \in I} \phi_i(T_i) = M$
2. Wähle *Teilung der Eins*, die dem Atlas untergeordnet ist:
 - a) $\forall i \in I : \epsilon_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ messbar $0 \leq \epsilon_i \leq 1$
 - b) $\forall x \in M : \sum_{i \in I} \epsilon_i(x) = 1$
 - c) $\epsilon_i = 0$ auf $M \setminus \phi_i(T_i)$

z.B. für $I = \mathbb{N}$ (was man stets wählen kann): Setze $M_i := \phi_i(T_i)$, $\epsilon_1 = 1_{[M_1]}$,

$$\epsilon_i = 1_{\left[M_i \setminus \left(\bigcup_{j < i} M_j \right) \right]} \Rightarrow \sum_{j=1}^i \epsilon_j = 1_{\left[\bigcup_{j=1}^i M_j \right]}$$

Definiere nun: $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *integrierbar über M*, falls $\forall i \in I : u \cdot \epsilon_i$ ist integrierbar über M_i und $\sum_{i \in I} \int_{M_i} |u \epsilon_i| \, dS < \infty$

In diesem Fall definiert man das *Integral*:

$$\int_M u \, dS := \sum_{i \in I} \int_{M_i} u \epsilon_i \, dS = \sum_{i \in I} \int_{T_i} u(\phi_i) \epsilon_i(\phi_i) \sqrt{g_i} \, d\mu_k$$

1. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der ϵ_i .
2. Man kann stets $I = \mathbb{N}$ wählen, und $\epsilon_i \in \phi_i(M_i)$
3. $\forall x \in M : \epsilon_i(x) = 0 \, \forall i$ bis auf endlich viele $i \in I$.

Das so definierte S ist ein Maß auf M , es heißt *k-dimensionales Flächenelement* oder *k-dimensionales Lebesgue-Maß* auf M . Im Spezialfall der globalen Karte gilt: $S(A) =$

$$\int_M 1_A \, dS = \int_{\phi^{-1}(A)} \sqrt{g} \, d\mu_k$$

11.2 Tangentialraum

Sei M k -dimensionale UMF im \mathbb{R}^n , $a \in M$.

Dann definiert man:

- Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Tangentialvektor* an M im Punkt a , falls $\exists \epsilon > 0$, $\exists C^1$ -Abbildung $\Psi :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$ mit $\begin{matrix} \Psi(0) & = & a \\ \Psi'(0) & = & v \end{matrix}$, also $\Psi(t) = a + tv + o(t)$.
- den *Tangentialraum*: $T_a M = \{\text{Tangentialvektoren } v \in \mathbb{R}^n \text{ an } M \text{ im Punkt } a \in M\}$.

Es gilt dann $\forall M, \forall a \in M$:

1. $T_a M$ ist k -dimensionaler, reeller Vektorraum.
2. Sei $\phi : S \rightarrow V \subset M$ Karte mit $\phi(s) = a \in V$ für ein $s \in S$.
Dann bilden $\frac{\partial \phi}{\partial t_1}(s), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial t_k}(s)$ eine Basis von $T_a M$
3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ mit $M \cap U = \{f = 0\}$ und $\text{rg } Df(a) = n - k$.
Dann ist $T_a M = \ker Df(a) = \{v \in \mathbb{R}^n : D_v f(a) = 0\}$
 $= \{v \in \mathbb{R}^n : \forall i = 1, \dots, n - k : \langle \text{grad } f_i(a), v \rangle = 0\}$

Man definiert den außerdem

- *Normalenraum* von M im Punkt a $N_a M = (T_a M)^\perp$ in \mathbb{R}^n ist $(n - k)$ -Vektorraum, d.h.
- $v \in \mathbb{R}^n$ ist *Normalenvektor* $\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$ ($\forall w \in T_a M$)

Es gilt dann $N_a M = \text{span} \{\text{grad } f_1(a), \dots, \text{grad } f_{n-k}(a)\}$.

11.3 Satz von Gauß

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit (stückweise) glattem Rand, $\nu : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußere Normalenfeld, $A \subset U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetiges, differenzierbares Vektorfeld. Dann ist:

$$\int_A \text{div } F \, d\mu_n(x) = \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle \, dS(x)$$

11.4 Greensche Formel

$\forall U$ offen, $\forall C^2$ -Funktionen $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall K \subset U$ kompakt mit glattem Rand:

1. *Erste Greensche Formel*:

$$\int_K f \Delta g \, d\mu_n = \int_{\partial K} f \cdot \frac{\partial g}{\partial \nu} \, dS - \int_K \nabla f \nabla g \, d\mu_n$$

'partielle Integration von Δg '

2. *Zweite Greensche Formel:*

$$\int_K f \Delta g - g \Delta f \, d\mu_n = \int_{\partial K} \left(f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) dS$$

11.5 Satz von Stokes

Gegeben:

- $U \subset \mathbb{R}^3$, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3 C^1$ -Vektorfeld
- $M \subset U$ 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit (Fläche) mit $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ Einheitsvektorfeld
- $A \subset M$ Kompaktum mit glattem Rand und Einheitstangentenfeld $\tau : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Dann gilt:

$$\int_A \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle \, dS = \int_{\partial A} \langle F, \tau \rangle \, ds$$

Oder kurz:

$$\int_A \operatorname{rot} F \, d\vec{S} = \int_{\partial A} F \, d\vec{s}$$

Dabei ist:

- $\operatorname{rot} F = \nabla \times F$
- $ds =$ 'Längenelement' = 1-dimensionales Maß auf ∂A ,
- $\tau(x)$ der Einheitstangentenvektor in $x \in \partial A$: $\tau(x) \in T_x(\partial A)$, $\|\tau(x)\| = 1$

Index

- σ -Algebra, 32
 - Borelsche, 32
 - Erzeuger, 33
- Abelscher Grenzwertsatz, 9
- abgeschlossen, 11
- Abschluss, 11
- Algebra, 33
 - σ -, 32
 - Erzeuger, 33
- Atlas, 44
- Beppo Levi, Satz von, 35
- Besselsche Ungleichung, 41
- Bildmaß, 36
- Bolzano-Weierstraß, Satz von, 14
- Cauchyfolge, 7, 12
- Determinante
 - Gramsche, 44
- Diffeomorphismus, 37
- Differentialgleichung, 27
 - gewöhnliche, 27
 - homogene, 29
 - inhomogene, 29
 - Lösungssystem, 30
 - Maximallösung, 28
 - partielle, 27
 - Propagator, 30
 - Separation der Variablen, 29
 - Variation der Konstanten, 30
- Differenzial, 20
- differenzierbar, 14
- Differenzierbarkeit, 14
 - partielle, 19
 - stetig partielle, 19
 - totale, 20
- Dirac-Folge, 40
- Euler-Lagrange-Gleichungen, 27
- Exponentialreihe, 9
- Extrema, 10, 15, 22, 24
 - Nebenbedingungen, 24
- Faltung, 9, 39
- Familie, 8
 - summierbar, 8
- fast-überall, 35
- Flächenelement
 - k -dimensionales, 44
- Folge
 - Cauchy, 7
 - Dirac-, 40
 - Faltung, 9
 - Häufungswert, 7
 - konvergente, 12
 - Konvergenz, 7
 - Teilfolge, 14
- Fourier
 - Koeffizienten, 41
 - Reihe, 41
 - Transformation, 42
- Fourier-Koeffizienten, 41
- Fourier-Reihe, 41
- Fouriertransformation, 42
- Fundamentalsatz der Differenzial- und Integralrechnung, 36
- Funktion, 10
 - differenzierbare, 14
 - elementar messbare, 34
 - Extrema, 10, 22
 - Faltung, 39
 - Fourier-Transformierte, 42
 - Gamma-, 26
 - gleichmäßig stetige, 10
 - Graf, 43
 - harmonische, 23
 - implizite, 23
 - konvexe, 16
 - Lagrange, 26
 - Lipschitz-stetige, 10, 16, 28
 - messbare, 34

- partiell differenzierbare, 19
- periodische, 41
- Regel-, 17
- stetige, 10
- Träger, 25
- Treppen-, 17
- Variation, 27

- Gamma-Funktion, 26
- Gauß, Satz von, 45
- gleichmäßig stetig, 10
- Gramsche Determinante, 44
- Greensche Formel, 45
- Gronwall, Lemma von, 28

- Häufungswert, 7
- Hadamard, Formel von, 9
- Hamiltonsches Prinzip, 27
- harmonisch, 23
 - sub-, 23
- Heine-Borel, Satz von, 14
- Hesse-Matrix, 22
- Hilbertraum, 41
- Homöomorphismus, 43
- Hurwitz, Satz von, 23

- Immersion, 43
- implizite Funktionen, 23
- Inneres, 11
- Integral, 17, 38
 - auf Untermannigfaltigkeiten, 44
 - Konvergenz, 35
 - Lebesgue-, 34, 38
 - Partialbruchzerlegung, 18
 - Rieman-, 17, 38
 - Wirkungs-, 26
- Integration
 - Fundamentalsatz der, 36
 - partielle, 18
 - Substitution, 18

- Jacobi-Matrix, 20, 37

- Kartenwechsel, 43
- kompakt, 13

- Kontraktion, 28
- Konvergenz, 7, 12, 24
 - Cauchy-Kriterium, 7
 - Folgen, 12
 - gleichmäßige, 13
 - Integrale, 35
 - Integralkriterium, 19
 - Leibniz, 7
 - Majorante, 7
 - Quotientenkriterium, 7
 - Radius, 9
 - Reihen, 7, 19
 - Teilfolge, 14
 - Wurzelkriterium, 8
- Konvergenzradius, 9
- konvex, 16, 23

- Lagrange-Funktion, 26
- Lagrange-Multiplikator, 25
- Lebesgue
 - Borel-Maß, 36
 - Integral, 34
 - Maß, 32, 37, 44
 - Räume, 38
 - Satz von, 36
- Lemma
 - von Fatou, 36
- Lipschitz-stetig, 10, 28
- $L^p(\Omega)$ -Räume, 38

- Maß, 32
 - Bild-, 36
 - Fortsetzung, 33
 - Lebesgue-, 32, 37
 - Lebesgue-Borel-, 36
 - Prä-, 33
 - Produkt-, 36
- Maßraum, 32
- Maßtensor, 43
- Majorante, 7
- Maximum, 10, 15, 22
- Maximumprinzip, 10, 23
- Menge
 - abgeschlossene, 11

- Abschluss, 11
- Inneres, 11
- kompakte, 13
- messbare, 32
- Null-, 35
- offen, 11
- Rand, 11
- sternförmige, 25
- vollständig, 12
- messbar, 32, 34
 - elementar, 34
- Messraum, 32
- metrischer Raum, 10
- Minimum, 10, 15, 22
- Mittelwertsatz, 15

- Normalenraum, 45
- Normalenvektor, 45
- Nullmenge, 35

- offen, 11
- offene Überdeckung, 13
- Orthogonalsystem
 - vollständiges, 41

- Parsevalsche Gleichung, 41
- Partialbruchzerlegung, 18
- partiell differenzierbar, 19
- periodische Funktion, 41
- Picard-Lindelöf
 - Satz von, 28
- Plancherel, Satz von, 42
- Potenzial, 25
- Potenzreihe, 9
- Prämaß, 33
- Produktmaß, 36
- Propagator, 30

- Quotientenkriterium, 7

- Rand, 11
- Raum
 - Hilbert-, 41
 - Kontraktion, 28
 - Lebesgue-, 38
 - Maßraum, 32
 - Messraum, 32
 - metrischer, 10
 - topologischer, 11
- Regelfunktion, 17
- Reihe
 - Exponential-, 9
 - Konvergenz, 7
 - Leibniz-Kriterium, 7
 - Majorante, 7
 - Potenz-, 9
 - Quotientenkriterium, 7
 - Umordnung, 8
 - Wurzelkriterium, 8

- Schwartz, Satz von, 20
- σ -Algebra, 32
 - Borelsche, 32
 - Erzeuger, 33
- sternförmig, 25
- stetig, 10, 12, 13, 20
 - gleichmäßig, 10
- Stetigkeit, 10, 12, 24
 - Folgenkriterium, 10
 - Lipschitz-, 10, 16, 28
 - Zwischenwertsatz, 10
- Stokes, Satz von, 46

- Tangententialraum, 45
- Tangententialvektor, 45
- Taylor-Reihe, 21
- Taylorsche Formel, 21
 - Lagrange-Restglied, 21
 - mehrdimensionale, 21
- Teilung der Eins, 44
- Topologie, 11
 - Relativ-, 43
- topologischer Raum, 11
- total differenzierbar, 20
- Träger, 25
- Transformationsformel, 37
- Transformationsatz, 37
- Treppenfunktion, 17

- Überdeckung, 13

Umgebung, 11
Umkehrsatz, 24
Ungleichung
 Besselsche, 41
 Cauchy-Schwarz, 16, 39
 Hölder, 16, 39
 Jensen, 16, 39
 Minkowski, 39
 Young, 39
Untermannigfaltigkeit, 43

Variation, 27
Vertauschbarkeit
 Differenziation und Integration, 25,
 40
 Limes und Ableitung, 25
vollständig, 12
vollständiges Orthogonalsystem, 41

Wirkungsintegral, 26
Wurzelkriterium, 8

Zerlegung, 17
 Feinheit, 17
Zwischenwertsatz, 10