

FP-Versuch E106

# Hohlraumresonatoren (Cavities)

Jan Hartmann      Tobias Seifen

10. August 2006

Ziel dieses Versuchs ist eine Einführung in die Physik der Hohlraumresonatoren. Hierzu werden deren Eigenschwingungen bei verschiedenen Einkopplungsorten vermessen und zugehörige Größen wie Kreisgüte, Koppelfaktor und Shuntimpedanz ermittelt. Außerdem wird das elektrische Feld entlang der Symmetrieachse des Resonators bestimmt, welches wichtig ist für die Beschleunigung geladener Teilchen, einem Hauptanwendungsgebiet der Cavities.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
1.1	Feldverteilung . . . . .	3
1.2	Kenngrößen . . . . .	4
1.2.1	Kreisgüte . . . . .	4
1.2.2	Shunt-Impedanz . . . . .	4
1.3	Einkopplung . . . . .	4
1.4	Störkörpermessung . . . . .	6
1.4.1	Resonante Störkörpermessung . . . . .	7
1.4.2	Nicht resonante Störkörpermessung . . . . .	7
1.4.3	Bestimmung der Shuntimpedanz . . . . .	7
1.4.4	Energiezuwachs beim Durchfliegen des Resonators . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Voraufgaben</b>	<b>8</b>
2.1	Eigenschwingungen der Resonatoren . . . . .	8
2.2	Die Einheiten dB und dBm . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Durchführung und Auswertung</b>	<b>9</b>
3.1	Dämpfung und Reflexion von Koaxialkabeln . . . . .	9
3.2	Skalare Messung der Resonatoreigenschwingungen . . . . .	9
3.3	Vektorielle Messung der $TM_{010}$ -Eigenschwingung . . . . .	10
3.4	Störkörpermessung . . . . .	12
3.4.1	Bestimmung des elektrischen Feldes . . . . .	12
3.4.2	Bestimmung der Shuntimpedanz . . . . .	13
3.4.3	Energiezuwachs eines Elektrons beim Durchfliegen des Resonators . . . . .	13
3.5	Weitere Einsatzmöglichkeiten für Hohlraumresonatoren . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Fazit</b>	<b>14</b>
<b>A</b>	<b>Tabellen</b>	<b>14</b>
<b>B</b>	<b>Abbildungen</b>	<b>17</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>20</b>

# 1 Theoretische Grundlagen

## 1.1 Feldverteilung

Verschließt man einen Hohlleiter an beiden Enden mit einer leitenden Platte, wird eine einlaufende Welle reflektiert und es bildet sich eine stehende Welle aus; man erhält einen Hohlraumresonator. Diese stehende Welle bezeichnet man als Eigenschwingung oder Mode des Resonators. Um die Randbedingungen ( $E_z = 0$  an den Wänden) zu erfüllen, muss ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge in den Resonator passen:

$l = p \cdot \frac{\lambda}{2}$  wobei  $l$  die Länge des Resonators,  $\lambda$  die Wellenlänge und  $p \in \mathbb{N}$  ist.

Zusätzlich zu den beiden Indizes bei Hohlleitern, die die Anzahl der Knotenflächen in transversaler Richtung beschreiben, kommt bei Hohlraumresonatoren ein dritter Index hinzu, der die Knotenzahl in longitudinaler Richtung angibt.

Es gibt zwei wichtige Klassen von Moden: transversal elektrische, TE-Moden, bei denen das elektrische Feld in longitudinaler Richtung  $E_z = 0$  ist, und transversal magnetische, TM-Moden, bei denen das magnetische Feld in longitudinaler Richtung  $H_z = 0$  ist.

Aus den Maxwell-Gleichungen lässt sich für zylindrische Hohlraumresonatoren folgender Feldverlauf in longitudinaler Richtung errechnen:

$$\text{TE}_{mnp}\text{-Moden: } H_z = H_{mn} \cdot J_m(k_c r) \cdot \cos(m\phi) \cdot \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \cdot e^{i\omega_{mnp} t} \quad (1)$$

$$\text{TM}_{mnp}\text{-Moden: } E_z = E_{mn} \cdot J_m(k_c r) \cdot \cos(m\phi) \cdot \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \cdot e^{i\omega_{mnp} t} \quad (2)$$

Hierbei bezeichnet  $J_m$  die sphärischen Besselfunktionen,  $k_c$  die kritische Wellenzahl und  $\omega_{mnp}$  die Resonanzfrequenzen.  $k_c$  ist definiert durch die Dispersionsrelation des Hohlleiters:

$$k_c^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \quad (3)$$

Für die Resonanzfrequenzen gilt

$$\omega_{mnp} = c \cdot \sqrt{\left(\frac{j_{mn}^{(l)}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2} \quad (4)$$

wobei  $a$  der Radius des Resonators ist und im Falle von TE-Moden  $j_{mn}'$ , die Nullstellen der ersten Ableitung der Besselfunktionen, und im Falle von TM-Moden  $j_{mn}$ , die Nullstellen der Besselfunktionen selbst, einzusetzen sind.

Durch Umstellen von (4) erhält man eine Geradengleichung

$$(d\nu)^2 = \left(\frac{c j_{mn}^{(l)}}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 p^2 \left(\frac{d}{l}\right)^2 \quad (5)$$

wobei der Durchmesser  $d = 2a$  eingeführt wurde. Nun kann man  $(d\nu)^2$  gegen  $\left(\frac{d}{l}\right)^2$  auftragen und erhält eine sogenannte Modenkarte (Abbildung 2). Für gegebenes  $\frac{d}{l}$  lässt sich mit deren Hilfe die Anordnung der Moden ablesen und die zugehörigen Frequenzen bestimmen.

## 1.2 Kenngrößen

### 1.2.1 Kreisgüte

Die Kreisgüte  $Q_0$  ist definiert als das  $2\pi$ -fache der im Resonator gespeicherten Energie  $W$  geteilt durch den Energieverlust pro Periode  $\Delta W$ .

$$Q_0 = \frac{2\pi \cdot W}{T \cdot P} = \frac{\omega_0 \cdot W}{P} \quad (6)$$

Die Güte kann durch Messung der Halbwertsbreite  $\Delta\omega_H$  bestimmt werden:

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_H} \quad (7)$$

Durch die Einkopplung der Hochfrequenz in den Resonator misst man nicht die unbelastete Güte  $Q_0$ , sondern die belastete Güte  $Q$ . Man definiert daher eine externe Güte  $Q_{\text{ext}}$ , die die externe Verlustleistung beschreibt, es gilt völlig analog

$$Q_{\text{ext}} = \frac{\omega \cdot W}{P_{\text{ext}}} \quad (8)$$

Aus der Beziehung  $P_{\text{ges}} = P + P_{\text{ext}}$  folgt eine Beziehung zwischen den Güten:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\text{ext}}} \quad (9)$$

### 1.2.2 Shunt-Impedanz

Die Impedanz des Resonators ist im allgemeinen komplex, im Resonanzfall wird sie allerdings reell. Dann bezeichnet man sie als Shunt-Impedanz  $R_S$ .

$$R_S = \frac{U^2}{2P} \quad (10)$$

mit Spannung  $U$  und Verlustleistung  $P$ .

## 1.3 Einkopplung

Es gibt im Wesentlichen drei Möglichkeiten der Einkopplung von Hochfrequenz in einen Resonator:

- Schleifenkopplung  
Kopplung an das magnetische Feld mittels einer Leiterschleife
- Stiftkopplung  
Kopplung an das elektrische Feld mittels eines Leiterstifts
- Schlitzkopplung  
direkte Einkopplung aus dem Hohlleiter mittels Schlitz

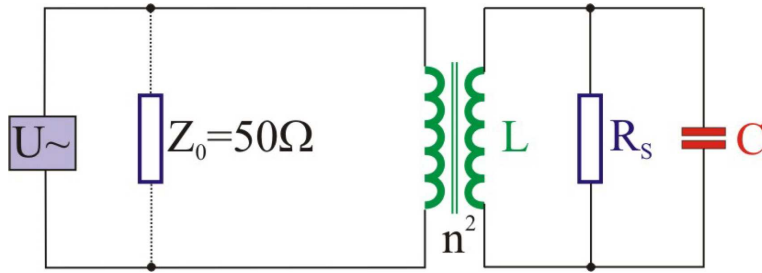


Abbildung 1: Ersatzschaltbild für die Schleifenkopplung

In diesem Versuch ist nur die Schleifenkopplung von Bedeutung. Man kann sie durch das in Abbildung 1 gezeigte Ersatzschaltbild darstellen. Um die im Generator erzeugten Mikrowellen möglichst reflexionsfrei in den Resonator zu bringen, muss die Leitung vom Generator zum Resonator mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen werden. Durch die Schleifenkopplung wird die im M $\Omega$ -Bereich liegende Shunt-Impedanz herabtransformiert. Das Verhältnis von Abschlusswiderstand zu Leitungsimpedanz wird als Koppelfaktor  $\kappa$  bezeichnet.

$$\kappa = \frac{Z_a}{Z_0} = \frac{R_s}{n^2 \cdot Z_0} \quad (11)$$

Oder ausgedrückt durch Güten, bzw. Leistungen

$$\kappa = \frac{Q_0}{Q_{\text{ext}}} = \frac{P_{\text{ext}}}{P} \quad (12)$$

Mit Hilfe des Koppelfaktors lässt sich die unbelastete Güte  $Q_0$  aus der belasteten Güte  $Q$  berechnen:

$$Q_0 = (1 + \kappa) Q \quad (13)$$

Analog gilt für die externe Güte  $Q_{\text{ext}}$ :

$$Q_{\text{ext}} = \frac{\kappa + 1}{\kappa} Q \quad (14)$$

Außerdem lässt sich die (externe) Verlustleistung  $P_{(\text{ext})}$  aus der insgesamt zugeführten HF-Leistung  $P_{\text{ges}} = P + P_{\text{ext}}$  berechnen:

$$P = \frac{1}{\kappa + 1} \cdot P_{\text{ges}} \quad P_{\text{ext}} = \frac{\kappa}{\kappa + 1} \cdot P_{\text{ges}} \quad (15)$$

Man definiert den Reflexionsfaktor  $\rho$  als das Verhältnis von rücklaufender und hinlaufender Welle:

$$\rho = \frac{\hat{U}_-}{\hat{U}_+} \quad (16)$$

Im Resonanzfall ist der Reflexionsfaktor minimal. Kopplungsfaktor und Reflexionsfaktor sind verknüpft:

$$|\rho| = \frac{\left|1 - \frac{1}{\kappa}\right|}{1 + \frac{1}{\kappa}} = \frac{|\kappa - 1|}{\kappa + 1} \quad \kappa = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad (17)$$

Man unterscheidet drei Fälle:

- $\kappa < 1$ : unterkritische Kopplung
- $\kappa = 1$ : kritische Kopplung;  $\rho = 0$
- $\kappa > 1$ : überkritische Kopplung

Das Stehwellenverhältnis (voltage standing wave ratio, VSWR)  $S$  ist definiert als Verhältnis von maximaler zu minimaler Spannungsamplitude.

$$S = \frac{|\hat{U}_{\max}|}{|\hat{U}_{\min}|} = \frac{|\hat{U}_+| + |\hat{U}_-|}{|\hat{U}_+| - |\hat{U}_-|} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad (18)$$

#### 1.4 Störkörpermessung

Die Störkörpermethode wird verwendet um den Feldverlauf im Inneren des Resonators zu bestimmen. Dazu bringt man einen kleinen Störkörper in den Resonator, der das Feld im Inneren nur leicht verändert, wobei die Veränderung des Feldes zu einer Änderung der Resonanzfrequenz führt. Aus diesen Änderungen kann man dann das ungestörte Feld am Ort des Störkörpers berechnen.

Die Verschiebung der Resonanzfrequenz  $\omega_0$  lässt sich aus der Slater-Formel berechnen:

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2} = \frac{\int_{V_S} (\vec{E}_0^* \cdot \vec{P} - \vec{H}_0^* \cdot \vec{M}) dV}{\varepsilon_0 \cdot \int_V |E_0^2| dV} = \frac{\int_{V_S} (\vec{E}_0^* \cdot \vec{P} - \vec{H}_0^* \cdot \vec{M}) dV}{2W} \quad (19)$$

wobei  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  die ungestörten Felder und  $\vec{P}, \vec{M}$  die Polarisation bzw. Magnetisierung durch den Störkörper bezeichnet.  $V_S$  ist das Volumen des Störkörpers und  $W$  die im Resonator gespeicherte Energie.

Für dielektrische Störkörper, wie im Versuch verwendet, verschwindet die Magnetisierung  $\vec{M}$  und man definiert die Störkörperkonstante  $\alpha_S$  durch

$$\alpha_S := \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) \cdot V_S \quad (20)$$

Damit und mit der Näherung kleiner Verschiebungen  $\Delta\omega$  lässt sich (19) schreiben als

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2} = \alpha_S \frac{E_0^2}{W} \approx 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \quad (21)$$

### 1.4.1 Resonante Störkörpermessung

Bei der resonanten Störkörpermessung wird die Verschiebung der Resonanzfrequenz gemessen. Daraus wird dann der Feldverlauf berechnet.

Für das elektrische Feld auf der  $z$ -Achse folgt aus (21)

$$E_0(z) = \sqrt{2 \frac{W}{\alpha_S} \cdot \frac{\Delta\omega(z)}{\omega_0}} \quad (22)$$

### 1.4.2 Nicht resonante Störkörpermessung

Bei der nicht resonanten Störkörpermessung wird die Änderung des Reflexionsfaktors  $\rho$  bei der ursprünglichen Frequenz gemessen und daraus dann der Feldverlauf berechnet.

$$\Delta\rho = \rho - \rho_0 = \frac{\kappa - \left(1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)}{\kappa + \left(1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)} - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \approx \frac{4i\kappa Q_0}{(1 + \kappa)^2} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \quad (23)$$

Mit (21) folgt daraus

$$E_0(z) = \sqrt{\frac{(1 + \kappa)^2}{2\kappa Q_0} \frac{W}{\alpha_S} \cdot |\Delta\rho(z)|} \quad (24)$$

### 1.4.3 Bestimmung der Shuntimpedanz

Die Shuntimpedanz  $R_S$  lässt sich aus (10) bestimmen, wobei die Spannung  $U$  durch Integration des zuvor mittels Störkörpermessung bestimmten elektrischen Feldes im Inneren des Resonators entlang der  $z$ -Achse bestimmt werden kann. Will man die Änderung des Feldes während der Laufzeit eines Teilchens durch den Resonator mitberücksichtigen, so muss man das Feld  $E_0(z)$  mit dem Faktor  $e^{i\omega t}$  multiplizieren, der im Fall ultrarelativistischer Teilchen ( $v \approx c$ ) als  $e^{i\omega \frac{z}{c}}$  geschrieben werden kann. Man erhält also als Ausdruck für die Shuntimpedanz

$$R_S = \frac{1}{2P} \cdot \left| \int_0^L E_0(z) \cdot e^{i\omega \frac{z}{c}} dz \right|^2 \stackrel{(6)}{=} \frac{Q_0}{2\omega_0 W} \cdot \left| \int_0^L E_0(z) \cdot e^{i\omega \frac{z}{c}} dz \right|^2 \quad (25)$$

### 1.4.4 Energiezuwachs beim Durchfliegen des Resonators

Mit Hilfe der Shuntimpedanz lässt sich nun der Energiezuwachs eines ultrarelativistischen geladenen Teilchens beim Durchfliegen des Resonators in Abhängigkeit von der zugeführten HF-Leistung berechnen:

$$\Delta E = qU \stackrel{(25)}{=} q\sqrt{2R_S P} \stackrel{(15)}{=} q\sqrt{2R_S \frac{P_{\text{ges}}}{\kappa + 1}} \quad (26)$$

## 2 Voraufgaben

### 2.1 Eigenschwingungen der Resonatoren

Die Versuchsresonatoren haben die Abmessungen  $d = 78,5 \text{ mm}$ ,  $l = 20 \text{ mm}$ , daraus folgt  $\left(\frac{d}{l}\right)^2 = 15,41$ . Mit Hilfe der Modenkarte (Abbildung 2) liest man nun die niedrigsten Moden des Resonators ab und mit den Nullstellen der Besselfunktionen bzw. deren Ableitung lassen sich aus (4) die niedrigsten Eigenfrequenzen der Resonatoren für TE und TM Moden berechnen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 aufgelistet.

### 2.2 Die Einheiten dB und dBm

Das Bel ist eine Einheit zur Beschreibung von Pegeln  $L$ . Mit ihm lassen sich z.B. Signalpegel sowie Verstärkungen und Dämpfungen beschreiben. Es ist allgemein definiert als der dekadische Logarithmus des Verhältnisses zweier Leistungen, aufgrund der handlicheren Zahlenwerte rechnet man jedoch üblicherweise in Dezibel (dB), und es gilt

$$L[\text{dB}] = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_1}{P_2} \right) \quad (27)$$

Im allgemeinen gilt diese Definition nicht nur für Leistungen, sondern auch für alle anderen quadratisch steigenden Größen. Bei der Rechnung mit linearen Größen (z.B. Spannungen) gilt

$$L[\text{dB}] = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_1}{U_2} \right) \quad (28)$$

was auch sofort aus dem Zusammenhang  $P \propto U^2$  folgt.

Mit dem dB lassen sich zuerst einmal nur relative Pegel angeben. Um absolute Pegel anzugeben, muss man sich auf einen genormten Standardwert beziehen. So lässt sich z.B. die Leistung in dBm (= bezogen auf 1 mW) angeben:

$$L[\text{dBm}] = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P}{1 \text{ mW}} \right) \quad (29)$$

0 dBm entspricht also 1 mW, eine Erhöhung um 3 dBm entspricht ungefähr einer Verdoppelung.

### 3 Durchführung und Auswertung

Um die beiden Versuchsresonatoren zu untersuchen, kommt zur Erzeugung der nötigen Hochfrequenz ein Rohde & Schwarz Signalgenerator zum Einsatz, der im Continuous-Wave-Betrieb eine feste Frequenz ausgibt und im Wobble-Betrieb ein vorgegebenes Frequenzintervall in einer einstellbaren Zeit durchläuft. Zur Analyse kommt ein mit dem Signalgenerator gekoppelter Netzwerkanalysator (NSA) zum Einsatz, mit dem mittels einer VSWR-Messbrücke der Reflexionsfaktor gemessen sowie mit dem Demodulator-Eingang eine Transmissionsmessung durchgeführt werden kann. Eine vektorielle Messung des Reflexionsfaktor ist hiermit allerdings nicht möglich, hierfür kommt ein Polar-Phase-Diskriminator sowie ein Oszilloskop im  $x$ - $y$ -Betrieb zum Einsatz.

Alle Fehler wurden, sofern nicht anders vermerkt, nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung berechnet.

#### 3.1 Dämpfung und Reflexion von Koaxialkabeln

Bevor die beiden Versuchsresonatoren genauer untersucht werden ist es Ziel des ersten Versuchsteils, die Transmissionseigenschaften von zwei verschiedenen Koaxialkabeln auf dem am Signalgenerator maximal verfügbaren Frequenzhub (0,01 bis 18 GHz) zu untersuchen, sowie eine Reflexionsmessung an einem  $50\ \Omega$ -Abschlusswiderstand durchzuführen. Die Transmissionsmessung erfolgt, indem das Signal des Generators über das zu untersuchende Kabel auf den Demodulatoreingang des NSA gegeben wird, für die Reflexionsmessung wird das mit  $50\ \Omega$  abgeschlossene Kabel an den Ausgang der VSWR-Brücke angeschlossen. Als Messkabel kommen dabei ein „RG142“ sowie ein „ST-18“ Koaxialkabel zum Einsatz.

Am Versuchstag war leider der Drucker defekt, daher befindet sich im Anhang nur eine grobe Skizze der Messwerte, es ist aber trotzdem deutlich zu erkennen, dass die Reflexionen bei beiden Kabeltypen ähnlich ausfallen, während bei der Transmissionsmessung auffällt, dass das „RG142“ zu hohen Frequenzen hin eine deutlich zunehmende Dämpfung aufweist. Das „ST-18“ ist daher für die Hochfrequenztechnik zu bevorzugen.

#### 3.2 Skalare Messung der Resonatoreigenschwingungen

In diesem Versuchteil sollen die ersten sechs der zuvor berechneten Eigenschwingungen der beiden Versuchsresonatoren vermessen werden. Hierzu erfolgt der Aufbau wie bei der Reflexionsmessung im ersten Versuchsteil, jedoch wird statt des Abschlusswiderstandes der Resonator angeschlossen. Auf diese Weise kann auf dem am Signalgenerator eingestellten Frequenzbereich der Betrag des Reflexionsfaktors  $|\rho|$  gemessen werden.

Für jede zu untersuchende Resonanz wird zunächst am Generator die Mittelfrequenz auf die zuvor berechnete Resonanzfrequenz eingestellt und ein großer Frequenzhub gewählt, um die Resonanz auch im Falle großer Abweichung vom berechneten Wert finden zu können. Anschließend wird am Generator die Mittelfrequenz auf die mit Hilfe der Cursor-Funktion des NSA grob bestimmte Resonanzfrequenz eingestellt sowie das Frequenzintervall verkleinert. Nach Kalibration des NSA können dann sowohl die Resonanzfrequenz  $\nu$  als auch der Betrag des Reflexionsfaktors bei der Resonanz abgelesen werden. Da nicht zwischen  $\rho < 0$  und  $\rho > 0$  unterschieden werden kann, ist auch nicht möglich, zwischen  $\kappa$  und  $\frac{1}{\kappa}$  zu

unterscheiden, daher geben wir immer  $\kappa > 1$  an, und es gilt:

$$\kappa = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad (30)$$

Um die Halbwertsbreite der Resonanz bestimmen zu können, muss zunächst  $|\rho(\omega_0 \pm \frac{\Delta\omega_H}{2})|$  bestimmt werden, denn nur für  $\kappa = 1$  ist  $|\rho(\omega_0 \pm \frac{\Delta\omega_H}{2})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Allgemein gilt

$$\left| \rho \left( \omega_0 \pm \frac{\Delta\omega_H}{2} \right) \right| = \frac{\sqrt{\kappa^2 + 1}}{\kappa + 1} \quad (31)$$

Mit dem hieraus berechneten Wert kann nun mit Hilfe der Line-Funktion des NSA bzw. bei asymmetrischer Resonanzkurve mit Hilfe des Delta-Cursors die Halbwertsbreite bestimmt und daraus mittels  $Q = \frac{\nu}{\Delta\nu_H}$  die Güte berechnet werden. Unsere Messwerte sowie deren Fehler sind in Tabelle 2 für den Resonator mit der Einkopplung von oben bzw. in Tabelle 3 für den Resonator mit der Einkopplung von der Seite aufgeführt.

Es fällt auf, dass die gemessenen Resonanzfrequenzen teilweise deutlich von den vorher berechneten abweichen. Die Abweichungen sind darauf zurückzuführen, dass bei der Berechnung von idealen Resonatoren ausgegangen wird, die Versuchsresonatoren jedoch Löcher in den Seitenwänden haben, das Metall nicht ideal leitend ist und die Schleife zur Einkopplung der Hochfrequenz einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf den Feldverlauf im Inneren des Resonator hat. Außerdem fällt auf, dass die  $TM_{010}$ -Mode beim Resonator mit der Einkopplung an der Seite nur sehr schwach zu sehen ist. Dies liegt daran, dass die Einkopplungsschleife in der Nähe der Mitte platziert ist, wo bei der  $TM_{010}$ -Mode das magnetische Feld verschwindet, diese Mode wird dort also nur sehr schwach angeregt.

### 3.3 Vektorielle Messung der $TM_{010}$ -Eigenschwingung

Mit der skalaren Messung konnte lediglich  $|\rho|$  bestimmt werden, was vor allem den oben bereits erwähnten Nachteil hat, dass nicht zwischen  $\kappa$  und  $\frac{1}{\kappa}$  unterschieden werden kann. Daher ist es sinnvoll, das im Allgemeinen komplexe  $\rho$  komplett zu kennen. Hierfür eignet sich die vektorielle Messung, die jedoch wesentlich aufwendiger ist als die Skalare, weswegen wir uns auf die Untersuchung der  $TM_{010}$ -Mode beim Resonator mit der Einkopplung von oben beschränken. Die Messung erfolgt mit einem Polar-Phase-Diskriminator (PPD), der anstelle der VSWR-Brücke zwischen Signalgenerator und Resonator geschaltet wird und dessen Ausgangssignal mit einem Oszilloskop im  $x$ - $y$ -Betrieb betrachtet werden kann. Außerhalb der Resonanz ist  $|\rho| \approx 1$ , wobei sich die komplexe Phase aufgrund des Laufzeitfaktors  $e^{-2ikl}$ , der durch das Verbindungskabel der Länge  $l$  zwischen PPD und Resonator zustande kommt, mit der Frequenz ändert. Im Idealfall ist also außerhalb der Resonanz ein Kreis mit Radius  $R = 1$  (der sog. „Reflexionskreis“) auf dem Oszilloskop erkennbar. Der Kreis kann zur Eichung benutzt werden, indem dieser zentriert und der Radius  $R$  in Skalenteilen abgelesen wird. Unsere Messung ergab

$$R = (31 \pm 3) \text{ Skt.}$$

Der recht große Fehler kommt dadurch zustande, dass  $|\rho|$  mit der Frequenz leicht variiert und der Reflexionskreis daher nicht als ein Kreis, sondern als viele leicht verbeulte Kreise zu sehen ist.

Im Bereich der Resonanz weicht  $\rho$  vom Reflexionskreis ab. Ohne den Laufzeitfaktor (also bei Messung direkt am Resonator) beschreibt  $\rho$  immer noch einen Kreis, dieser schneidet die reelle Achse bei  $-1$  und  $\rho(\omega_0)$ ,  $\rho(\omega_0 \pm \frac{\Delta\omega_H}{2})$  ist maximal imaginär. Durch den Laufzeitfaktor wird dieser Kreis um den Ursprung gedreht und verbeult, wobei im Fall hoher Kreisgüten das Verbeulen vernachlässigt werden kann. Im Idealfall sind auf dem Oszilloskop also der Reflexionskreis und der Resonanzkreis zu sehen, wobei sich beide in einem Punkt berühren. Der Einfluss des Laufzeitfaktors kann nun kompensiert werden, indem das Koordinatensystem so gedreht wird, dass der Berührungspunkt der beiden Kreise bei  $-1$  liegt. Stellt man nun den Signalgenerator auf Continuous-Wave-Betrieb um, so ist auf dem Oszilloskop nur noch ein Punkt zu sehen. Durch verändern der Frequenz verschiebt man den Punkt entlang der Kreise. Bei der Resonanzfrequenz  $\nu_0$  befindet sich dieser Punkt auf der reellen Achse, unsere Messung ergab

$$\nu_0 = (2,99454 \pm 0,00001) \text{ GHz}$$

Dieser Wert stimmt im Rahmen der Messfehler mit dem Messwert aus der skalaren Messung überein.

Um den Reflexionsfaktor  $\rho_0$  bei der Resonanz zu bestimmen, muss der vorzeichenbehaftete Abstand  $d$  des Resonanzpunktes vom Koordinatenursprung gemessen werden:

$$d = (-9 \pm 1) \text{ Skt.} \quad \Rightarrow \rho_0 = \frac{d}{R} = -0,290 \pm 0,043$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{1 + \rho_0}{1 - \rho_0} = 0,550 \pm 0,052$$

Zur Bestimmung der Halbwertsbreite wird der Resonanzkreis auf den Koordinatenursprung zentriert und der Frequenzbereich zwischen unterem und oberem Schnittpunkt mit der imaginären Achse gemessen:

$$\Delta\nu_H = (0,92 \pm 0,1) \text{ MHz}$$

Aus der Halbwertsbreite lässt sich analog zur skalaren Messung die belastete Kreisgüte  $Q$  berechnen. Da die Halbwertsbreite jedoch deutlich kleiner ist als die in 3.2 gemessene, führt dies zu einer deutlich größeren Güte.

$$Q = \frac{\nu_0}{\Delta\nu_H} = 3270 \pm 360$$

Außerdem lassen sich unbelastete Güte  $Q_0$ , externe Güte  $Q_{\text{ext}}$  sowie die (externe) Verlustleistung  $P_{\text{(ext)}}$  berechnen.

$$Q_0 = (1 + \kappa) Q = 5060 \pm 260 \quad Q_{\text{ext}} = \frac{Q_0}{\kappa} = 9200 \pm 980$$

Der Generator lieferte eine Leistung von  $P_{\text{ges}} = 8 \text{ dBm} = 6,31 \text{ mW}$ . Mit Gleichung (15) sowie mit  $P = P_{\text{ges}} - P_{\text{ext}}$  folgt

$$P_{\text{ext}} = P_{\text{ges}} \cdot \frac{\kappa}{\kappa + 1} = (2,24 \pm 0,13) \text{ mW} \quad P = (4,07 \pm 0,13) \text{ mW}$$

### 3.4 Störkörpermessung

Ziel dieses Versuchsteils ist es, das elektrische Feld auf der  $z$ -Achse des Hohlraumresonators zu bestimmen. Dazu wird ein an einem Garn befestigter dielektrischer Störkörper in den Resonator gebracht. Um die Position des Störkörpers im Resonator zu verändern, kann der Resonator entlang der  $z$ -Achse verschoben werden. Die Position wird hierbei mit einem potentiometrischen Weggeber gemessen. Der Aufbau ist ansonsten der gleiche wie bei der skalaren Messung der Eigenschwingungen 3.2, es wird allerdings nur der Resonator mit der Einkopplung von oben benutzt.

Resonante und nicht resonante Messung können gleichzeitig durchgeführt werden, da mit Hilfe des Delta-Cursors der Abstand der gestörten von der ungestörten Resonanzfrequenz und mit der Cursorposition der Reflexionsfaktor an der ursprünglichen Frequenz  $\omega_0$  gemessen werden kann. Die Änderung des Reflexionsfaktors ist einfach die Differenz des gestörten zum ungestörten Reflexionsfaktor bei  $\omega_0$ . Den ungestörten Reflexionsfaktor haben wir zu  $\rho_0 = 0,189$  gemessen.

Als Störkörper wurde eine Teflonkugel mit Radius  $r = 1$  mm benutzt, deren Permittivität  $\varepsilon_r = 2,1$  beträgt. Daraus lässt sich mit (20) die Störkörperkonstante  $\alpha_S$  berechnen:

$$\alpha_S = 2,040 \cdot 10^{-20} \frac{\text{C m}^2}{\text{V}}$$

Mit den in 3.3 ermittelten Werten  $Q_{\text{ext}} = 9200 \pm 980$  und  $P_{\text{ext}} = (2,24 \pm 0,13)$  mW lässt sich aus (6) die im Resonator gespeicherte Energie berechnen:

$$W = (1,095 \pm 0,134) \text{ nJ}$$

#### 3.4.1 Bestimmung des elektrischen Feldes

Das elektrische Feld  $E_0(z)$  lässt sich nun aus (22) für die resonante und aus (24) für die nicht resonante Störkörpermessung bestimmen.

Die gemessenen Werte mit ihren Fehlern finden sich in Tabelle 4, ein Plot der Feldstärken in Abbildung 5.

Es fällt auf, dass die auf die verschiedenen Weisen bestimmten Felder unterschiedlich groß sind. Vermutlich ist der Unterschied der vektorieLL gemessenen Güte zur skalar gemessenen dafür mitverantwortlich. Die Güte taucht bei der nicht resonanten Messung im Nenner auf, eine zu große Güte führt also zu einem kleineren Feld.

Desweiteren fiel uns auf, dass sich der Reflexionsfaktor  $\rho$  nach einigen Minuten änderte. Es gelang nicht eine komplette Messung durchzuführen, ohne eine solche Änderung. Diese Änderungen sind in der nicht resonanten Messung bei 43 mm und 69 mm als Abfall bzw. Erhöhung des Feldes zu sehen. Das mit der nicht resonanten Methode gemessene Feld sollte also an den Rändern stärker (relativ zum Zentrum) abfallen.

Die Form beider Felder stimmt aber in etwa mit den Erwartungen einer  $\text{TM}_{010}$ -Mode überein.

### 3.4.2 Bestimmung der Shuntimpedanz

Die Shuntimpedanz  $R_S$  lässt sich aus (25) bestimmen. Da wir das elektrische Feld  $E_0(z)$  in Intervallen der Breite 1 mm gemessen haben, lässt sich das Integral als Summe schreiben:

$$R_S = \frac{1}{2P} \left| \sum_i E_0(z_i) e^{i\omega \frac{z_i}{c}} \cdot 1 \text{ mm} \right|^2 = \frac{1}{2P} \left| \sum_i U_i(z_i) \right|^2$$

Für den Fehler  $\Delta R_S$  gilt nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung

$$\Delta R_S = R_S \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)^2 + \left(\frac{\Delta |U|^2}{|U|^2}\right)^2}$$

wobei  $\Delta |U|^2 = \sqrt{(2 \Re U \Delta \Re U)^2 + (2 \Im U \Delta \Im U)^2}$ . Da die Fehler der  $U_i$  korreliert sind, können  $\Delta \Re U$  bzw.  $\Delta \Im U$  nicht nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung berechnet werden, stattdessen werden die einzelnen Fehler summiert:  $\Delta \Re U = \sum_i \Delta \Re U_i$  und  $\Delta \Im U = \sum_i \Delta \Im U_i$ .

Bei Vernachlässigung der Fehler für  $z$  und  $\omega$  gilt

$$\Delta \Re U_i = 1 \text{ mm} \cdot \cos\left(\omega \frac{z_i}{c}\right) \cdot \sqrt{(\Delta E_0(z_i))^2 + \left(\frac{E_0(z_{i-1}) - E_0(z_{i+1}))}{2}\right)^2}$$

$$\Delta \Im U_i = 1 \text{ mm} \cdot \sin\left(\omega \frac{z_i}{c}\right) \cdot \sqrt{(\Delta E_0(z_i))^2 + \left(\frac{E_0(z_{i-1}) - E_0(z_{i+1}))}{2}\right)^2}$$

wobei der zweite Summand die Schwankungen des Feldes innerhalb eines Intervalls berücksichtigt.

Mit dem in 3.3 ermittelten Wert  $P = (4,07 \pm 0,13)$  mW erhalten wir für das mit Hilfe der resonanten Störkörpermessung bestimmte elektrische Feld eine Shuntimpedanz von  $R_S = (203 \pm 39)$  k $\Omega$ , für die nicht resonante Methode ergibt sich  $R_S = (62 \pm 13)$  k $\Omega$ .

### 3.4.3 Energiezuwachs eines Elektrons beim Durchfliegen des Resonators

Aus der Shuntimpedanz und dem in 3.3 bestimmten Koppelfaktor für die  $TM_{010}$ -Mode lässt sich mit Hilfe von (26) der Energiezuwachs  $\Delta E$  eines ultrarelativistischen Elektrons beim durchfliegen des Resonators in Abhängigkeit von der zugeführten HF-Leistung berechnen. Für  $P_{\text{ges}} = 10$  kW ergibt sich für die mit Hilfe der resonanten Methode berechnete Shuntimpedanz  $\Delta E = (51 \pm 5)$  keV, für die mit Hilfe der nicht resonanten Methode berechnete Shuntimpedanz ergibt sich  $\Delta E = (28 \pm 3)$  keV.

Der in diesem Versuch untersuchte Resonator ist allerdings nicht besonders gut zur Beschleunigung geladener Teilchen geeignet. Die Shuntimpedanz ist zu klein, so dass zu hohe Leistungen zugeführt werden müssen, um ausreichend hohe Beschleunigungsspannungen zu erreichen. Außerdem ist der Resonator zu klein, aufgrund begrenzter Durchschlagsfestigkeit (ca.  $1 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$ ) sind in einem 20 mm großen Resonator keine großen Beschleunigungsspannungen (typischerweise im Bereich einiger Megavolt) möglich.

### 3.5 Weitere Einsatzmöglichkeiten für Hohlraumresonatoren

Hohlraumresonatoren werden nicht nur zur Teilchenbeschleunigung eingesetzt. Man benutzt sie z.B. auch in einem Klystron, das zur Erzeugung oder Verstärkung von Hochfrequenzsignalen benutzt wird. Ein Elektronenstrom durchläuft dazu einen Hohlraumresonator, in den ein Signal eingekoppelt wurde. Der Elektronenstrom wird durch das Durchlaufen dieser (oder auch mehrerer) Resonatoren geschwindigkeitsmoduliert, um in einem weiteren Hohlraumresonator Moden anzuregen, die ausgekoppelt werden können. Die Shuntimpedanz solcher Resonatoren liegt im Bereich einiger  $k\Omega$ .

## 4 Fazit

Der Versuch liefert einen schönen Überblick über die Physik der Hohlraumresonatoren. Bei allen Messungen haben wir plausible Ergebnisse mit vernünftig erscheinenden Fehlern erhalten, allerdings lieferten die unterschiedlichen Messungen stark unterschiedliche Ergebnisse. Diese Unterschiede sind nicht allein durch Messungenauigkeiten zu erklären, die Ursache können wir jedoch aufgrund mangelnder Erfahrung mit Hohlraumresonatoren und auf dem Gebiet der Hochfrequenztechnik nicht finden.

## A Tabellen

Mode	Frequenz $\frac{\nu}{\text{GHz}}$
TM <sub>010</sub>	2,923369749
TM <sub>110</sub>	4,657939098
TM <sub>210</sub>	6,243010351
TM <sub>020</sub>	6,710359050
TM <sub>310</sub>	7,755909689
TE <sub>111</sub>	7,821873434
TM <sub>011</sub>	8,044767825
TE <sub>211</sub>	8,364045607
TM <sub>120</sub>	8,528357041
TM <sub>111</sub> /TE <sub>011</sub>	8,824318405

Tabelle 1: Berechnete Eigenschwingungen der Versuchsresonatoren

Mode	$\frac{\nu_{\text{th}}}{\text{GHz}}$	$\frac{\nu}{\text{GHz}}$	$\frac{\Delta\nu}{\text{GHz}}$	$ \rho $	$\Delta \rho $	$\kappa$	$\Delta\kappa$	$ \rho(\frac{\Delta\nu_{\text{H}}}{2}) $	$\frac{\Delta\nu_{\text{H}}}{\text{MHz}}$	$\frac{\Delta(\Delta\nu_{\text{H}})}{\text{MHz}}$	$Q$	$\Delta Q$	Bemerkung
TM <sub>010</sub>	2,92337	2,99449	0,00010	0,199	0,003	1,497	0,009	0,7210	2,17	0,01	1378	6	
TM <sub>110</sub>	4,65794	4,52798	0,00010	0,310	0,003	1,899	0,013	0,7403	8,57	0,02	529	1	asymmetrisch
TM <sub>210</sub>	6,24301	6,20253	0,00010	0,530	0,003	3,255	0,027	0,8003	8,98	0,03	691	2	asymmetrisch
TM <sub>020</sub>	6,71036	6,94816	0,00010	0,043	0,003	1,090	0,007	0,7078	14,23	0,08	488	3	asymmetrisch
TM <sub>310</sub>	7,75591	8,04923	0,00010	0,240	0,003	1,632	0,010	0,7272	13,80	0,06	583	3	asymmetrisch
TE <sub>111</sub>	7,82187	8,27243	0,00010	0,049	0,003	1,103	0,007	0,7080	21,80	0,20	379	3	asymmetrisch

Tabelle 2: Skalare Messung der Eigenschwingungen: Einkopplung von oben

Mode	$\frac{\nu_{\text{th}}}{\text{GHz}}$	$\frac{\nu}{\text{GHz}}$	$\frac{\Delta\nu}{\text{GHz}}$	$ \rho $	$\Delta \rho $	$\kappa$	$\Delta\kappa$	$ \rho(\frac{\Delta\nu_{\text{H}}}{2}) $	$\frac{\Delta\nu_{\text{H}}}{\text{MHz}}$	$\frac{\Delta(\Delta\nu_{\text{H}})}{\text{MHz}}$	$Q$	$\Delta Q$	Bemerkung
TM <sub>010</sub>	2,92337	2,99193	0,00010	0,922	0,003	24,641	0,986	0,9618	0,84	0,01	3583	43	
TM <sub>110</sub>	4,65794	4,52710	0,00020	0,720	0,003	6,143	0,077	0,8713	6,57	0,03	689	3	
TM <sub>210</sub>	6,24301	6,20075	0,00010	0,146	0,003	1,342	0,008	0,7146	1,61	0,01	3851	24	
TM <sub>020</sub>	6,71036	6,20423	0,00010	0,068	0,003	1,146	0,007	0,7087	2,01	0,01	3087	15	
TM <sub>310</sub>	7,75591	7,73939	0,00010	0,173	0,003	1,418	0,009	0,7176	3,22	0,02	2404	15	überlappt mit TE <sub>111</sub>
TE <sub>111</sub>	7,82187	7,74117	0,00010	0,360	0,003	2,125	0,015	0,7515	1,91	0,02	4061	43	überlappt mit TM <sub>310</sub>

Tabelle 3: Skalare Messung der Eigenschwingungen: Einkopplung von der Seite

$\frac{z}{\text{mm}}$	resonante Messung				nichtresonante Messung			
	$\frac{\Delta\nu}{\text{MHz}}$	$\frac{\Delta(\Delta\nu)}{\text{MHz}}$	$\frac{E_0}{\text{V/m}}$	$\frac{\Delta(E_0)}{\text{V/m}}$	$\Delta\rho$	$\Delta(\Delta\rho)$	$\frac{E_0}{\text{V/m}}$	$\frac{\Delta(E_0)}{\text{V/m}}$
39	0,003	0,003	328	165	0,000	0,003		
40	0,012	0,003	656	91	0,010	0,003	481	77
41	0,012	0,003	656	91	0,010	0,003	481	77
42	0,018	0,003	803	83	0,012	0,003	527	74
43	0,023	0,003	908	81	0,016	0,003	609	71
44	0,032	0,003	1071	83	0,015	0,003	589	71
45	0,042	0,003	1227	87	0,017	0,003	628	70
46	0,055	0,003	1404	94	0,020	0,003	681	70
47	0,068	0,003	1561	102	0,024	0,003	746	71
48	0,075	0,003	1640	106	0,028	0,003	805	73
49	0,088	0,003	1776	113	0,032	0,003	861	75
50	0,096	0,003	1855	117	0,037	0,003	926	78
51	0,106	0,003	1949	122	0,039	0,003	950	79
52	0,109	0,003	1977	124	0,043	0,003	998	81
53	0,116	0,003	2039	127	0,044	0,003	1010	82
54	0,118	0,003	2057	128	0,047	0,003	1043	84
55	0,122	0,003	2091	130	0,047	0,003	1043	84
56	0,118	0,003	2057	128	0,047	0,003	1043	84
57	0,116	0,003	2039	127	0,045	0,003	1021	83
58	0,112	0,003	2004	125	0,044	0,003	1010	82
59	0,108	0,003	1968	123	0,042	0,003	986	81
60	0,099	0,003	1884	119	0,038	0,003	938	78
61	0,091	0,003	1806	114	0,036	0,003	913	77
62	0,084	0,003	1735	111	0,030	0,003	834	74
63	0,070	0,003	1584	103	0,028	0,003	805	73
64	0,060	0,003	1467	97	0,024	0,003	746	71
65	0,048	0,003	1312	90	0,021	0,003	697	70
66	0,036	0,003	1136	84	0,019	0,003	663	70
67	0,023	0,003	908	81	0,017	0,003	628	70
68	0,019	0,003	825	82	0,017	0,003	628	70
69	0,010	0,003	599	97	0,017	0,003	628	70
70	0,005	0,003	423	130	0,016	0,003	609	71
71	0,000	0,003			0,016	0,003	609	71
72	-0,005	0,003			0,017	0,003	628	70
73	-0,010	0,003			0,017	0,003	628	70
74	-0,015	0,003			0,026	0,003	776	72

Tabelle 4: Störkörpermessung zur Bestimmung von  $E_0$

## B Abbildungen

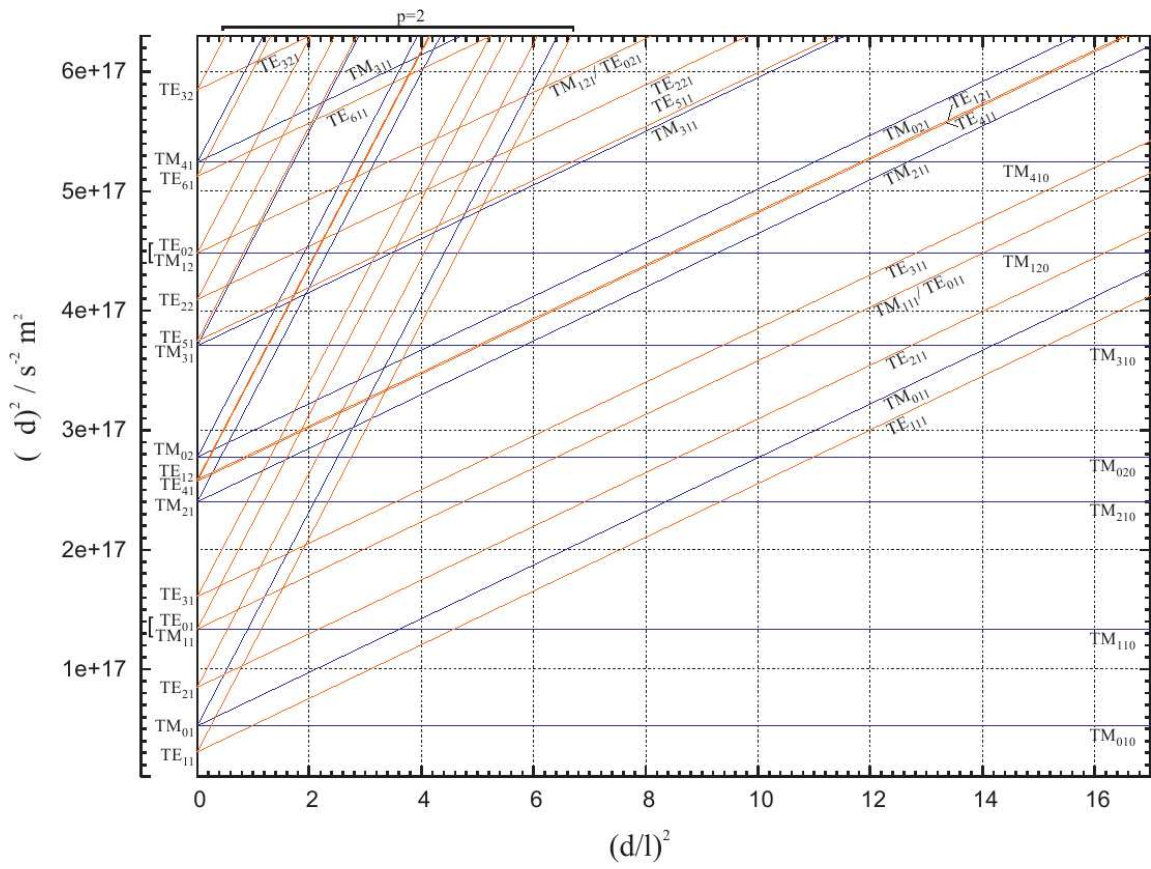


Abbildung 2: Modenkarte (aus [1])

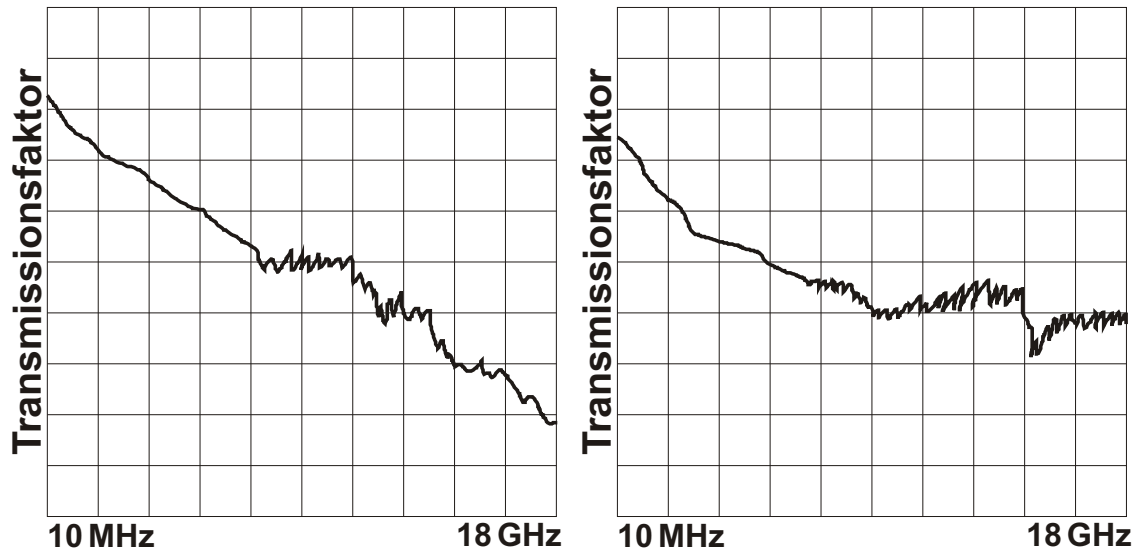


Abbildung 3: Vergleich der Dämpfung des RG142 (links) und des ST-18 (rechts) Koaxialkabels

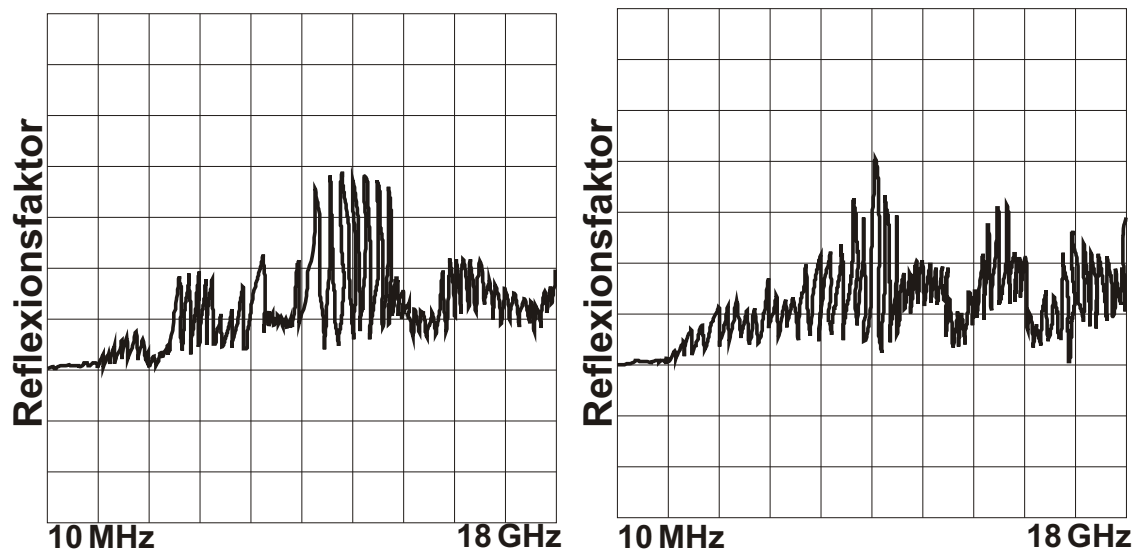


Abbildung 4: Vergleich des Reflexionsfaktors des RG142 (links) und des ST-18 (rechts) Koaxialkabels

# Stoerkoerpermessung

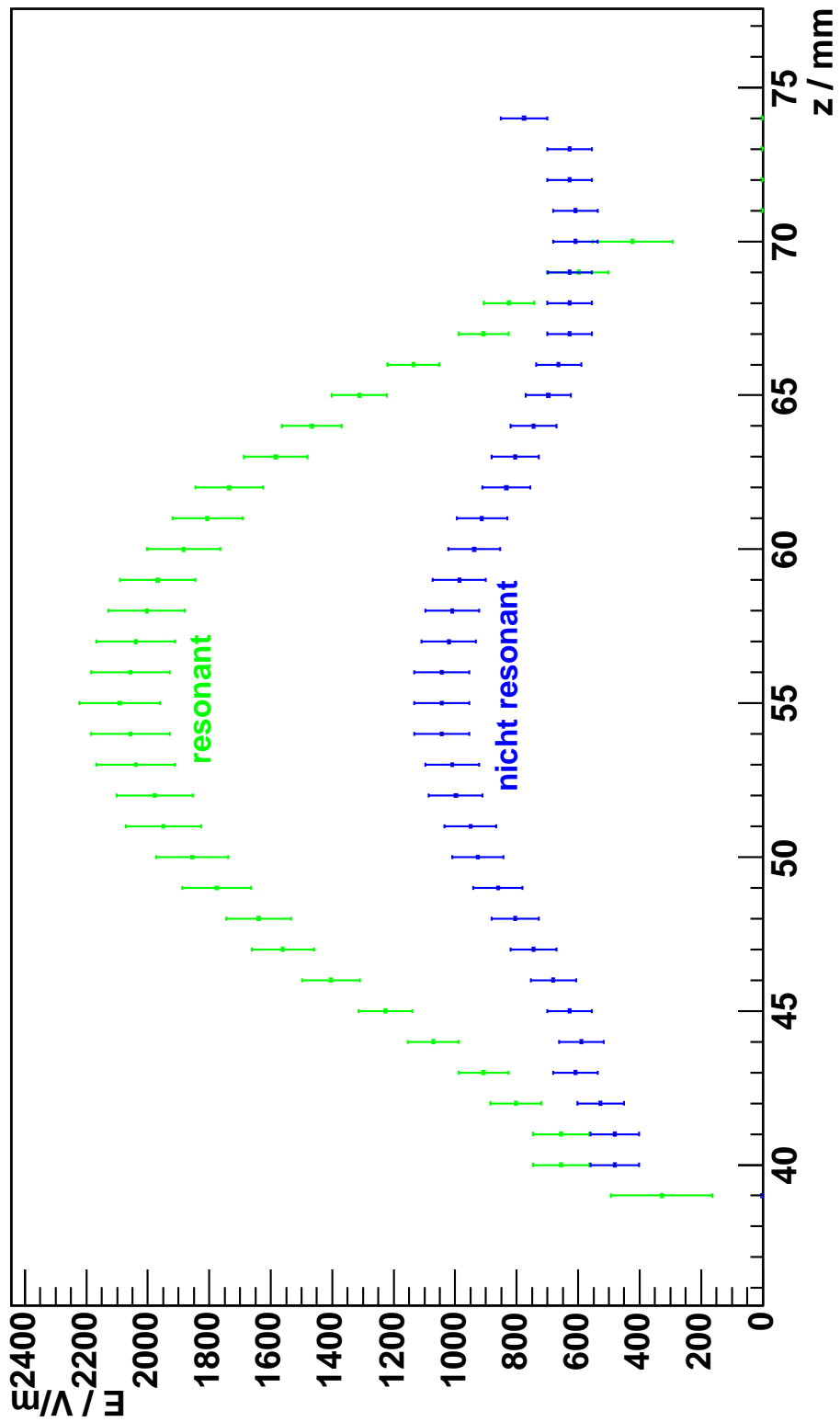


Abbildung 5:  $E_0$ -Verlauf ermittelt aus Stoerkoerpermessung

## Literatur

- [1] *Ergänzende Informationen zur Versuchsdurchführung*
- [2] Versuchsbeschreibungen *Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene Teil I*
- [3] W. Hillert: *Particle Accelerator Physics I*, Vorlesungsskript, Universität Bonn, 2006
- [4] C. Peschke: *Messungen und Berechnungen zu longitudinalen und transversalen Shunt-impedanzen einer Elektronen-Positronen-Linearbeschleuniger-Struktur*, Diplomarbeit, Universität Frankfurt a.M., 1995
- [5] W. F. O. Müller: *Untersuchungen zu Moden höherer Ordnung in konstanten und varierten Beschleunigerstrukturen für zukünftige linear Collider*, Dissertation, Universität Frankfurt a.M., 2000